



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



## Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

## Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

## Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.

# BIBLIOGRAPHIC RECORD TARGET

Graduate Library  
University of Michigan

Preservation Office

Storage Number: \_\_\_\_\_

ABN6571

UL FMT B RT a BL m T/C DT 07/18/88 R/DT 07/18/88 CC STAT mm E/L 1

035/1: : |a (RLIN)MIUG86-B46001

035/2: : |a (CaOTULAS)160035747

040: : |a MiU |c MiU

100:1 : |a Ganter, Heinrich.

245:04: |a Die Elemente der analytischen Geometrie der Ebene ... |c von dr. H.  
Ganter und dr. F. Rudio.

250: : |a 2. verbesserte Aufl.

260: : |a Leipzig, |b B. G. Teubner, |c 1894.

300/1: : |a 168 p.

650/1: 0: |a Geometry, Analytic

700/1:1 : |a Rudio, Ferdinand, |d 1856-1929. |e joint author.

998: : |c WFA |s 9124

---

Scanned by Imagenes Digitales  
Nogales, AZ

On behalf of  
Preservation Division  
The University of Michigan Libraries

---

Date work Began: \_\_\_\_\_  
Camera Operator: \_\_\_\_\_

Verlag von **B. G. Teubner** in Leipzig.

---

**Analytische Geometrie (Koordinatengeometrie).**

---

**1. Analytische Geometrie der Ebene.**

(Kegelschnitte und höhere ebene Kurven.)

- Benter, Untersuchungen über Tangentialkegel und die Kurven 2. Gr.  
Clebsch, Vorlesungen über Geometrie, I. Band, bearb. von Lindemann.  
Dingeldey, Erzeugung von Kurven 4. O. durch Bewegungsmechanismen.  
—— topologische Studien u. s. w.  
Durège, die ebenen Kurven dritter Ordnung.  
Fort und Schlömilch, Lehrbuch der analytischen Geometrie. 1. Teil.  
Ganter und Rudio, Elemente der analytischen Geometrie der Ebene.  
Graefe, Vorlesungen über die Theorie der Quaternionen.  
—— Aufgaben und Lehrsätze aus der anal. Geometrie der Ebene.  
—— ——— Auflösungen und Beweise dazu.  
Hesse, 7 Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte.  
—— Vorlesgn aus der anal. Geom. der Geraden, des Punktes u. d. Kreises.  
—— 4 Vorlesungen aus der analytischen Geometrie.  
Hochheim, Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene.  
Richter, über besondere Systeme von Kegelschnitten u. s. w.  
Rudio und Ganter, siehe: Ganter und Rudio.  
Salmon, analytische Geometrie der Kegelschnitte, bearb. von Fiedler.  
—— analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven, bearb. v. Fiedler.  
Schlömilch und Fort, siehe: Fort und Schlömilch.  
Schwering, Theorie und Anwendung der Linienkoordinaten.  
Servus, die analytische Geometrie der Ebene.  
Weissenborn, Grundzüge der analytischen Geometrie der Ebene.

**2. Analytische Geometrie des Raumes.**

(Flächen 2. und höheren Grades, allg. Theorie der Raumkurven und Flächen.)

- Benter, Untersuchungen über Tangentialkegel und die Kurven 2. Gr.  
Clebsch, Vorlesungen über Geometrie, II. Band, bearb. v. Lindemann.  
Escherich, v., Einleitung in die analytische Geometrie des Raumes.  
Fort und Schlömilch, Lehrbuch der analytischen Geometrie. 2. Teil.  
Graefe, Aufgaben und Lehrsätze aus der analyt. Geometrie des Raumes.  
—— ——— Auflösungen und Beweise dazu.  
Hesse, Vorlesgn über analyt. Geom. des Raumes, revid. von Gundelfinger.  
Joachimsthal, Anwendung der Differential- und Integral-Rechnung  
auf die allgemeine Theorie der Flächen u. s. w., bearb. von Natani.

Knoblauch, Einleitung in die allgemeine Theorie der krummen Flächen.  
 Kommerell und Stahl, siehe: Stahl und Kommerell.  
 Loria, hauptsächl. Theorien d. Geom. in ihrer Entwickelg., dtsh. v. Schütte.  
 Reye, Geometrie der Kugeln und linearen Kugelsysteme.  
 Rudio, die Elemente der analytischen Geometrie des Raumes.  
 Salmon, analytische Geometrie des Raumes, bearbeitet von Fiedler.  
 Schlömilch und Fort, siehe: Fort u. Schlömilch.  
 Stahl und Kommerell, die Grundformeln der allgemeinen Flächentheorie.

### 3. Liniengeometrie, analytisch behandelt.

(Strahlensysteme u. Komplexe.)

Clebsch, Vorlesungen über Geometrie, bearbeitet von Lindemann.  
 Fiedler, Elemente der neueren Geometrie.  
 Hesse, 4 Vorlesungen aus der analytischen Geometrie.  
 Plücker, neue Geometrie des Raumes, herausgeg. von Clebsch u. Klein.  
 Schwing, Theorie und Anwendung der Linienkoordinaten.  
 Sturm, die Gebilde 1. und 2. Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung.  
 Weissenborn, Grundzüge der analytischen Geometrie der Ebene.

### 4. Allgemeine Mannigfaltigkeitslehre.

Killing, die nicht-Euklidischen Raumformen.  
 Schlegel, System der Raumlehre.


### 5. Konforme Abbildung.

(Isogonale Verwandtschaft — siehe auch unter „Funktionentheorie“.)  
 Holzmüller, Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften.  
 — einige Aufgaben der darstellenden Geometrie und der Kartographie.  
 — Durchführung einer isogonalen Verwandtschaft, repräsentiert durch eine gebrochene Funktion 2. Grades.

### 6. Kartenprojektionen.

Herz, Lehrbuch der Landkartenprojektionen.  
 Holzmüller, einige Aufg. der darstellenden Geom. u. d. Kartographie.  
 Zöppritz, Leitfaden der Kartenentwurfslehre.

---

 Nähere Angaben über ein jedes der obigen Bücher: wie ausführlichen Titel, Umfang, Jahr des Erscheinens, Preis, kurze Darlegung des zu Grunde liegenden Plans u. s. w., giebt Teubners Verlagsverzeichnis auf dem Gebiete der Mathematik, der technischen und Naturwissenschaften. Dieses Verzeichnis versendet die Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig, Poststrasse 3, gratis und franko auf Verlangen.

---

**DIE ELEMENTE**  
DER  
**ANALYTISCHEN GEOMETRIE**  
**DER EBENE.**

---

ZUM GEBRAUCH AN HÖHEREN LEHRANSTALTEN  
SOWIE ZUM SELBSTSTUDIUM

DARGESTELLT

UND MIT ZAHLREICHEN ÜBUNGSBEISPIELEN VERSEHEN

VON

**Dr. H. GANTER**  
PROFESSOR AN DER KANTONSSCHULE  
IN AARAU.

UND

**Dr. F. RUDIO**  
PROFESSOR AM POLYTECHNIKUM  
IN ZÜRICH.

---

MIT 54 FIGUREN IM TEXT.

---

ZWEITE VERBESSERTE AUFLAGE.



LEIPZIG,  
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.  
1894.

---

ALLE RECHTE,  
EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

---

### Vorrede zur zweiten Auflage.

---

In verhältnismässig kurzer Zeit ist von unserm Buche eine zweite Auflage nötig geworden. Mit Rücksicht auf diesen Umstand, namentlich aber auch auf die zahlreichen, unserer Arbeit gewidmeten günstigen Besprechungen fühlten wir uns verpflichtet, an dem der ersten Auflage zu Grunde gelegten Plane festzuhalten. Nach wie vor suchten wir den Lehrstoff von vorn herein in enge, einem ersten Studium entsprechende Grenzen einzuschliessen, innerhalb dieser Grenzen aber Vollständigkeit, verbunden mit einer streng wissenschaftlichen Darstellung, anzustreben. Während wir somit den Charakter des Buches ungeändert liessen, waren wir um so mehr bestrebt, durch sorgfältige Revision des Textes unser Buch zu vervollkommen. Ein besonderes Gewicht legten wir auch diesmal auf die einem jeden Paragraphen hinzugefügten Übungsaufgaben, deren das Buch jetzt über 400 enthält.

Mögen die vorgenommenen Änderungen von der kundigen Kritik als Verbesserungen anerkannt werden, und möge unser Buch sich nicht nur die alten Freunde bewahren, sondern auch zu den alten neue hinzugewinnen!

Aarau und Zürich, Februar 1894.

Die Verfasser.



## Inhaltsverzeichnis.

### Erstes Kapitel.

#### Der Punkt. (65 Aufgaben.)

	Seite
§ 1. Bestimmung der Lage eines Punktes in einer Geraden durch seine Abscisse . . . . .	1
§ 2. Bestimmung von Strecken. . . . .	2
§ 3. Bestimmung der Lage eines Punktes in einer Geraden durch sein Teilverhältnis . . . . .	4
§ 4. Doppelverhältnis. Harmonische Punkte . . . . .	7
§ 5. Bestimmung der Lage eines Punktes in der Ebene durch Koordinaten . . . . .	10
§ 6. Koordinatentransformation durch Verlegung des Anfangs- punktes. (Parallelverschiebung) . . . . .	12
§ 7. Polarkoordinaten . . . . .	13
§ 8. Aus den rechtwinkligen Koordinaten zweier Punkte $P$ und $P_1$ ihre Entfernung und die Neigung ihrer Verbindungslinie gegen die $x$ -Achse zu bestimmen . . . . .	14
§ 9. Aus den gegebenen Koordinaten $x_1, y_1$ und $x_2, y_2$ zweier Punkte $P_1$ und $P_2$ die Koordinaten $x, y$ desjenigen Punktes $P$ der Verbindungslinie zu finden, der mit der Strecke $P_1 P_2$ ein gegebenes Teilverhältnis $\lambda$ bildet . . . . .	16
§ 10. Den Inhalt des Dreiecks zu bestimmen, welches der Anfangs- punkt mit zwei Punkten $P_1$ und $P_2$ bildet . . . . .	17
§ 11. Den Inhalt eines beliebigen Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ aus den Koor- dinaten der Ecken zu berechnen . . . . .	19
§ 12. Folgerungen. Kriterien für die Lage eines Punktes in Bezug auf eine Gerade . . . . .	21
§ 13. Den Inhalt eines Vielecks aus den Koordinaten seiner Ecken zu berechnen . . . . .	23
§ 14. Bestimmung des Abstandes eines Punktes von einer Geraden	24
§ 15. Übergang von einem rechtwinkligen Achsensysteme zu einem schiefwinkligen . . . . .	26

### Zweites Kapitel.

#### Die gerade Linie. (90 Aufgaben.)

§ 16. Definition der Gleichung einer Geraden. Die Gerade sei be- stimmt durch zwei Punkte . . . . .	28
--	----

	Seite
§ 17. Fortsetzung. Die Gerade sei bestimmt durch ihren Abstand vom Anfangspunkte und den Winkel, den dieser mit der $x$ -Achse bildet. . . . .	30
§ 18. Fortsetzung. Die Gerade sei gegeben durch ihre Achsenabschnitte . . . . .	31
§ 19. Fortsetzung. Die Gerade sei gegeben durch einen Punkt und den Winkel, den sie mit der positiven Richtung der $x$ -Achse bildet. Richtungskoeffizient. . . . .	32
§ 20. Jede Gerade besitzt eine Gleichung von der Form: $Ax + By + C = 0,$ und umgekehrt, jede Gleichung dieser Form stellt eine Gerade dar. . . . .	35
§ 21. Ableitung der speziellen Formen der Gleichung einer Geraden aus der allgemeinen Form $Ax + By + C = 0$ . . . . .	39
§ 22. Fortsetzung. Die Normalform. . . . .	41
§ 23. Die Koordinaten des Durchschnittspunktes zweier Geraden aus den Gleichungen derselben zu bestimmen. . . . .	43
§ 24. Den Winkel zweier Geraden aus ihren Gleichungen zu bestimmen, unter Voraussetzung rechtwinkliger Koordinaten . .	45
§ 25. Die Bedingung zu finden, unter welcher sich die drei Geraden $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ , $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ und $A_3x + B_3y + C_3 = 0$ in einem und demselben Punkte schneiden. Die Gleichung des Strahlenbüschels . . . . .	49
§ 26. Die Gleichungen der Winkelhalbierenden zweier Geraden zu finden. . . . .	52
§ 27. Affine Punktsysteme . . . . .	55
§ 28. Sätze aus der Theorie der Transversalen. Das vollständige Viereck . . . . .	58
§ 29. Geometrische Örter. . . . .	61
§ 30. Hauptaufgabe und Methode der analytischen Geometrie . . .	64

## Drittes Kapitel.

**Der Kreis.** (50 Aufgaben.)

§ 31. Die Gleichung des Kreises . . . . .	66
§ 32. Bestimmung eines Kreises durch drei Punkte. . . . .	69
§ 33. Der Kreis und die Gerade. . . . .	70
§ 34. Die Tangente in einem Punkte des Kreises. . . . .	72
§ 35. Tangenten von einem Punkte außerhalb des Kreises. Berührungsehne, Pol und Polare . . . . .	75
§ 36. Die Potenz eines Punktes in Bezug auf einen Kreis . . . .	77
§ 37. Systeme von Kreisen. Potenzlinie . . . . .	78
§ 38. Vermischte Aufgaben über den Kreis . . . . .	82

## Viertes Kapitel.

**Die Ellipse.** (80 Aufgaben.)

§ 39. Definition und Gleichung . . . . .	85
§ 40. Diskussion der Gleichung der Ellipse . . . . .	86

	Seite
§ 41. Polargleichung der Ellipse, bezogen auf den Mittelpunkt . .	88
§ 42. Konstruktion der Ellipse mittels des eingeschriebenen und des umgeschriebenen Kreises . . . . .	91
§ 43. Konjugierte Durchmesser . . . . .	92
§ 44. Die Gleichung der Ellipse, bezogen auf zwei konjugierte Durchmesser als schiefwinklige Koordinatenachsen . . . . .	95
§ 45. Die Ellipse und die Gerade. Die Tangente in einem Punkte der Ellipse . . . . .	96
§ 46. Tangenten und Durchmesser . . . . .	99
§ 47. Die exzentrische Anomalie . . . . .	102
§ 48. Weitere Sätze über konjugierte Durchmesser . . . . .	103
§ 49. Pol und Polare . . . . .	107
§ 50. Lehrsätze über Pol und Polare . . . . .	110
§ 51. Brennpunkteigenschaften . . . . .	113
§ 52. Die Direktrix . . . . .	118
§ 53. Flächeninhalt der Ellipse. . . . .	119

## Fünftes Kapitel.

**Die Hyperbel.** (80 Aufgaben.)

§ 54. Definition und Gleichung . . . . .	121
§ 55. Polargleichung der Hyperbel, bezogen auf den Mittelpunkt .	125
§ 56. Die Hyperbel und die Gerade . . . . .	129
§ 57. Konjugierte Durchmesser . . . . .	132
§ 58. Die Gleichung der Hyperbel, bezogen auf zwei konjugierte Durchmesser als schiefwinklige Koordinatenachsen . . . . .	135
§ 59. Die Tangente in einem Punkte der Hyperbel . . . . .	135
§ 60. Tangente und Durchmesser. . . . .	137
§ 61. Die Asymptoten als Koordinatenachsen . . . . .	138
§ 62. Beziehungen zwischen den Sehnen und Tangenten einer Hy- perbel und ihren Asymptoten . . . . .	139
§ 63. Pol und Polare . . . . .	143
§ 64. Brennpunkteigenschaften . . . . .	144
§ 65. Die Direktrix . . . . .	147

## Sechstes Kapitel.

**Die Parabel.** (40 Aufgaben.)

§ 66. Definition und Gleichung. . . . .	149
§ 67. Die Parabel und die Gerade. Durchmesser . . . . .	152
§ 68. Tangente und Normale . . . . .	154
§ 69. Anwendung schiefwinkliger Koordinaten . . . . .	158
§ 70. Pol und Polare . . . . .	160
§ 71. Flächeninhalt eines Parabelsegmentes . . . . .	163
§ 72. Gemeinsame Darstellungen von Ellipse, Hyperbel und Parabel	165

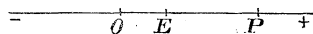
## Erstes Kapitel.

### Der Punkt.

#### § 1. Bestimmung der Lage eines Punktes in einer Geraden durch seine Abscisse.

In einer als unbegrenzt gedachten Geraden seien zwei Punkte  $O$  und  $E$  gegeben, von denen wir den ersten als Anfangspunkt, den zweiten als Einheitspunkt bezeichnen.

Fig. 1.



Die Länge der Strecke  $OE$  wählen wir als Längeneinheit, durch die wir jede auf der Geraden befindliche Strecke messen wollen. Wir stellen uns etwa vor,  $OE$  sei gleich einem Centimeter, sodafs alle vorkommenden Strecken sich als Vielfache von einem Centimeter darstellen.

Indem wir dem Punkte  $O$  den Punkt  $E$  zugesellen, gewinnen wir aber nicht nur einen Maßstab für die Längen der auf der Geraden vorkommenden Strecken, sondern wir sind jetzt auch im Stande, die beiden von  $O$  ausgehenden Richtungen unserer Geraden von einander zu unterscheiden. Wir wollen die Richtung von  $O$  nach  $E$  als die positive Richtung, die entgegengesetzte als die negative Richtung der Geraden bezeichnen. Dabei werden wir, um die Vorstellungen zu fixieren, ein für allemal den Punkt  $E$  rechts von  $O$  annehmen, sodafs die Richtung von  $O$  aus nach rechts als die positive, die von  $O$  aus nach links als die negative zu betrachten ist.

Ist nun auf der Geraden ein beliebiger Punkt  $P$  gegeben, so ist dessen Lage vollständig bestimmt, wenn man erstens

seine (durch die Längeneinheit  $OE$  gemessene) Entfernung vom Anfangspunkte  $O$  kennt und wenn man zweitens weiß, ob er rechts oder links von  $O$  sich befindet. Es liegt daher nach dem Obigen nahe, die Entfernung  $OP$  mit einem Vorzeichen zu versehen, nämlich mit dem positiven, wenn die Richtung  $OP$  die positive ist, d. h. wenn  $P$  rechts von  $O$  liegt, dagegen mit dem negativen Vorzeichen, wenn die Richtung  $OP$  die negative ist, d. h. wenn  $P$  links von  $O$  sich befindet.

Mann nennt die, mit dem entsprechenden Vorzeichen versehene, Entfernung  $OP$  die Abscisse des Punktes  $P$  in Bezug auf den Anfangspunkt  $O$  und dem entsprechend die gegebene Gerade  $OE$  die Abscissenachse.

Alle Punkte rechts von  $O$  haben dann positive, alle Punkte links von  $O$  negative Abscissen. Insbesondere hat  $E$  die Abscisse  $+1$ . Nach diesen Erörterungen wird der folgende Satz unmittelbar einleuchten:

Jedem Punkte  $P$  der Abscissenachse entspricht eine ganz bestimmte (positive oder negative) Zahl, nämlich seine Abscisse, und umgekehrt, jeder (positiven oder negativen) Zahl entspricht ein ganz bestimmter Punkt der Abscissenachse, nämlich derjenige, dessen Abscisse gleich der gegebenen Zahl ist.

Wir sind demnach im Stande, die ganze Zahlenreihe von  $-\infty$  bis  $+\infty$  geometrisch durch eine Punktreihe zu veranschaulichen, gewissermaßen abzubilden, und umgekehrt die Punktreihe, deren Träger die gegebene Gerade ist, in eindeutiger Weise durch eine Zahlenreihe zu repräsentieren. In dieser eigentümlichen Verknüpfung von Punkten und Zahlen besteht das Wesen der analytischen Geometrie.

Aufgabe.\*) Nach Wahl von  $O$  und  $E$  bestimme die Punkte mit den Abscissen  $1, -1, \frac{3}{2}, -\frac{4}{3}, \sqrt{2}, -\sqrt{3}$ .

## § 2. Bestimmung von Strecken.

Die im Vorhergehenden entwickelten, auf der Einführung des Richtungsunterschiedes begründeten Anschauungen über-

\*) Man zeichne bei dieser wie bei allen folgenden Aufgaben stets die zugehörige Figur.

tragen wir auch auf begrenzte Strecken der Abscissenachse, indem wir einen Unterschied machen zwischen der Strecke  $AB$  und der Strecke  $BA$ . Wir nennen eine beliebige Strecke  $AB$  mit dem Anfangspunkte  $A$  und dem Endpunkte  $B$  positiv oder negativ, je nachdem man, um von  $A$  nach  $B$  zu gelangen, in der positiven oder der negativen Richtung sich bewegen muß. Dann ist also allemal die Strecke  $BA$  mit dem Anfangspunkte  $B$  und dem Endpunkte  $A$  der Strecke  $AB$  gleich und entgegengesetzt und daher:

$$(1) \quad AB + BA = 0.$$

Bedeutet  $C$  einen beliebigen dritten Punkt der Abscissenachse, so gilt in Folge dieser Festsetzungen stets, wie auch die drei Punkte zu einander liegen mögen, die Gleichung:

$$(2) \quad AB + BC + CA = 0$$

oder:

$$(3) \quad AB = CB - CA.$$

Bezeichnet man dem entsprechend mit  $x_1$  und  $x_2$  die Abscissen zweier Punkte  $P_1$  und  $P_2$  in Bezug auf den Anfangspunkt  $O$ , so hat man  $P_1P_2 = OP_2 - OP_1 = x_2 - x_1$ , während die Strecke  $P_2P_1$  durch  $x_1 - x_2$  dargestellt wird.

Wählt man ferner auf der Abscissenaxe einen neuen Anfangspunkt  $O'$ , dessen Abscisse  $OO' = a$  ist, und bezeichnet die Abscisse eines Punktes  $P$  in Bezug auf den alten Anfangspunkt  $O$ , also  $OP$ , mit  $x$ , dagegen die Abscisse von  $P$  in Bezug auf den neuen Anfangspunkt  $O'$ , also  $O'P$ , mit  $x'$ , so erhält man aus der Gleichung  $O'P = OP - OO'$  die Relation:

$$(4) \quad x' = x - a \quad \text{oder} \quad x = x' + a.$$

Diese Gleichungen zeigen, wie sich die Abscisse eines Punktes beim Übergange zu einem neuen Anfangspunkte ändert.

Aufg. 1. Welches ist die Länge der Strecke  $AB$ , wenn die Abscissen von  $A$  und  $B$  in Bezug auf den Anfangspunkt  $O$  resp.  $\frac{5}{3}$  und  $-\frac{1}{2}$  sind? Welches Vorzeichen hat  $AB$ ?

Aufg. 2. Bestimme Länge und Vorzeichen der Strecken  $P_1P_2$  und  $P_2P_1$ , wenn die Abscissen von  $P_1$  und  $P_2$  das eine Mal  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 5$ , ein anderes Mal  $x_1 = -3$ ,  $x_2 = \frac{1}{2}$ , ein drittes Mal  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = -\frac{1}{4}$  sind.

Aufg. 3. Beweise, daß der Mittelpunkt der Strecke  $P_1P_2$  die Abscisse  $\frac{x_1 + x_2}{2}$  hat, wenn  $x_1$  und  $x_2$  die Abscissen von  $P_1$  und  $P_2$  sind.

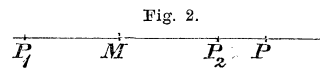
Aufg. 4. Der neue Anfangspunkt  $O'$  habe in Bezug auf den alten Anfangspunkt  $O$  die Abscisse  $a = -3$ . Welches sind die neuen Abscissen der Punkte  $P_1, P_2, P_3$ , deren alte Abscissen resp.  $x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = -2, x_3 = -3$  sind?

### § 3. Bestimmung der Lage eines Punktes in einer Geraden durch sein Teilverhältnis.

Man kann die unendliche Zahlenreihe auf die Punktreihe einer Geraden noch in einer andern Weise abbilden. Zu diesem Zwecke fixieren wir zunächst wieder auf der Geraden eine positive und eine negative Richtung. Wir wählen sodann auf der Geraden zwei Punkte  $P_1$  und  $P_2$  und nennen die Strecke  $P_1P_2$  die Fundamentalstrecke. Dieselbe besitzt nicht nur eine bestimmte Länge (gemessen durch die gewählte Längeneinheit), sondern auch eine bestimmte Richtung, durch welche sie sich von der Strecke  $P_2P_1$  unterscheidet.

Sei jetzt  $P$  ein beliebiger dritter Punkt der Geraden, so ist stets:

(1)  $P_1P + PP_2 + P_2P_1 = 0$ , oder  $P_1P = P_1P_2 - PP_2$ , gleichgültig ob  $P$  auf der Fundamentalstrecke oder außerhalb



derselben liegt, wenn nur bei jeder der Strecken das Vorzeichen richtig beachtet wird. Man nennt das Verhältnis der beiden Teilstrecken  $P_1P$  und  $PP_2$ , also den Quotienten  $\frac{P_1P}{PP_2}$ , das Teilverhältnis des Punktes  $P$  in Bezug auf die Fundamentalstrecke  $P_1P_2$ . Zu jedem Punkte  $P$  gehört dann eine ganz bestimmte Zahl, nämlich sein Teilverhältnis, und zwar ist dasselbe positiv für alle Punkte zwischen  $P_1$  und  $P_2$ , weil dann  $P_1P$  und  $PP_2$  gleichgerichtet sind, und negativ für alle Punkte außerhalb der Fundamentalstrecke,

weil dann immer  $P_1P$  und  $PP_2$  entgegengesetzte Richtungen haben. Sehen wir nun zu, wie sich das Teilverhältnis  $\frac{P_1P}{PP_2}$ , welches wir kurz mit  $\lambda$  bezeichnen wollen, ändert, wenn  $P$  die unendliche Gerade durchläuft.

Befindet sich  $P$  in  $P_1$ , so ist offenbar sein Teilverhältnis  $\lambda = 0$ . Bewegt sich dann  $P$  von  $P_1$  bis zum Mittelpunkte  $M$  der Fundamentalstrecke, so wird  $\lambda$  allmählich gröfser und erreicht in  $M$  den Wert  $+1$ . Geht  $P$  über  $M$  hinaus bis zu  $P_2$ , so wächst  $\lambda$  über alle Grenzen; für  $P_2$  selbst ist daher  $\lambda = +\infty$  zu setzen. Würde sich  $P$  von der entgegengesetzten Seite her dem Punkte  $P_2$  genähert haben, so hätte  $\lambda$  immer gröfsere und gröfsere negative Werte angenommen, sodafs dem Punkte  $P_2$  dann das Teilverhältnis  $-\infty$  zuzusprechen wäre. (Man vergleiche damit das Verhalten von  $\operatorname{tg} \alpha$  für  $\alpha = 90^\circ$ .)

Für alle Punkte aufserhalb der Fundamentalstrecke ist  $\lambda$ , wie schon bemerkt, negativ, und zwar erkennt man, dafs, wenn  $P$  aufserhalb und auf der Seite von  $P_2$  liegt,  $\lambda$  sich zwischen  $-\infty$  und  $-1$  befindet, dafs dagegen, wenn  $P$  aufserhalb und auf der Seite von  $P_1$  liegt,  $\lambda$  allemal Werte zwischen  $0$  und  $-1$  besitzt. Es fragt sich noch, welchem Werte nähert sich  $\lambda$ , wenn  $P$  nach der einen oder der andern Seite der Geraden sich ins Unendliche bewegt? Da:

$$P_1P = P_1P_2 - PP_2$$

ist, so folgt:

$$(2) \quad \lambda = \frac{P_1P}{PP_2} = -1 + \frac{P_1P_2}{PP_2}.$$

Mag sich nun  $P$  nach der einen oder der andern Seite hin in's Unendliche bewegen, so wird  $\frac{P_1P_2}{PP_2}$  sich immer mehr und mehr der Null nähern, sodafs wir in beiden Fällen den Grenzwert  $-1$  für  $\lambda$  erhalten.

Wir wählen daher die Ausdrucksweise, die Gerade besitze einen einzigen unendlich fernen Punkt, dem man sich in der einen oder der andern Richtung nähern kann und welchem das Teilverhältnis  $-1$  zukommt. Betrachtet man dann der Gleichförmigkeit des Ausdrucks wegen auch die beiden Grenzwerte  $+\infty$  und  $-\infty$ , die wir für das Teilverhältnis



von  $P_2$  erhalten haben, als zusammenfallend, so ergibt sich der folgende Satz:

Jedem Punkte  $P$  der Geraden entspricht eine ganz bestimmte (positive oder negative) Zahl, nämlich sein Teilverhältnis, und umgekehrt, jeder (positiven oder negativen) Zahl entspricht ein ganz bestimmter Punkt der Geraden, nämlich derjenige, dessen Teilverhältnis gleich der gegebenen Zahl ist.

Die Gleichung  $\lambda = -1 + \frac{P_1 P_2}{PP_2}$  liefert nämlich zu jedem  $\lambda$  ein ganz bestimmtes  $PP_2 = \frac{P_1 P_2}{1 + \lambda}$  und damit auch einen ganz bestimmten Punkt  $P$ , sodaß auch die Umkehrung gerechtfertigt ist.

Der Vollständigkeit halber stellen wir diese Verhältnisse noch durch folgende Tabelle zusammen:

Bewegt sich $P$	so bewegt sich $\lambda$
von $P_1$ bis $M$	von 0 bis $+1$
„ $M$ „ $P_2$	„ $+1$ „ $+\infty$
„ $P_2$ „ $\infty$	„ $-\infty$ „ $-1$
„ $\infty$ „ $P_1$	„ $-1$ „ 0.

Wählt man, wie in § 1, einen beliebigen Anfangspunkt  $O$  und nennt die Abscissen der drei Punkte  $P_1, P_2, P$  resp.  $x_1, x_2, x$ , so ist  $P_1 P = x - x_1$  und  $PP_2 = x_2 - x$ .

Man erhält daher:

$$(3) \quad \lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x}, \text{ und folglich } x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},$$

Gleichungen, welche aus der Abscisse eines Punktes das Teilverhältnis desselben und umgekehrt zu berechnen gestatten.

Aufg. 1. Konstruiere die Punkte mit den Teilverhältnissen  $2, \frac{1}{3}, -3, -\frac{1}{5}, -\frac{5}{2}$ .

Aufg. 2. Zeige, daß das Teilverhältnis  $\lambda$  eines Punktes  $P$  unabhängig ist von der gewählten Längeneinheit und unabhängig davon, wie man die positive Richtung der Geraden fixiert.

Aufg. 3. Bestimme aus den Abscissen  $x_1$  und  $x_2$  von  $P_1$

und  $P_2$  die Abscissen der Punkte mit den Teilverhältnissen  $0, 1, -1, \infty, \frac{2}{3}, 2, -2, -\frac{1}{2}$  und gib die Lage dieser Punkte an.

#### § 4. Doppelverhältnis. Harmonische Punkte.

Bei vielen Gelegenheiten ist es erforderlich, gleichzeitig die Teilverhältnisse zweier Punkte ins Auge zu fassen. Seien also zwei Punkte  $S_1$  und  $S_2$  gegeben, welche mit einer Fundamentalstrecke  $P_1P_2$  resp. die Teilverhältnisse:

$$\lambda_1 = \frac{P_1S_1}{S_1P_2} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \frac{P_1S_2}{S_2P_2}$$

bilden.

Man nennt dann den Quotienten  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$  das Doppelverhältnis der vier Punkte  $P_1, P_2, S_1, S_2$ . Dasselbe ist positiv, wenn  $S_1$  und  $S_2$  entweder zugleich innerhalb oder zugleich außerhalb der Fundamentalstrecke  $P_1P_2$  liegen, dagegen negativ, wenn von den beiden Punkten  $S_1$  und  $S_2$  der eine innerhalb, der andere außerhalb von  $P_1P_2$  liegt. Wir wollen für das Doppelverhältnis  $\frac{P_1S_1}{S_1P_2} : \frac{P_1S_2}{S_2P_2}$  die Bezeichnung  $(P_1P_2S_1S_2)$  wählen, dabei aber genau auf die Reihenfolge achten, in der die vier Buchstaben auf einander folgen. In der Bezeichnung  $(P_1P_2S_1S_2)$  bedeutet also der erste Buchstabe den Anfangspunkt, der zweite den Endpunkt der Fundamentalstrecke, der dritte Buchstabe den ersten Teilpunkt und der vierte den zweiten Teilpunkt. Wählt man demnach auf der Geraden vier beliebige Punkte  $A, B, C, D$ , so bedeutet  $(ABCD)$  das Doppelverhältnis  $\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}$ , während beispielsweise  $(BCAD)$  das Doppelverhältnis  $\frac{BA}{AC} : \frac{BD}{DC}$  bedeuten würde, welches man erhält, wenn man die Fundamentalstrecke  $BC$  das eine Mal durch  $A$ , das andere Mal durch  $D$  teilt.

Da man vier Buchstaben auf 24 verschiedene Arten auf einander folgen lassen kann, so geben vier Punkte zu 24 Doppelverhältnissen Veranlassung, die aber nicht alle von einander verschieden sind.

Von besonderer Wichtigkeit ist der Fall, wo die vier

Punkte  $A, B, C, D$  so liegen, daß ihr Doppelverhältnis  $(ABCD) = -1$  ist. In diesem Falle sagt man, die vier Punkte bilden eine harmonische Gruppe oder sind harmonische Punkte. Man nennt überdies  $A$  und  $B$  einerseits,  $C$  und  $D$  andererseits, zugeordnete Punkte und erkennt, daß die beiden Paare  $A, B$  und  $C, D$  einander trennen, in dem Sinne, daß, wenn ein Punkt eines Paares im Innern der von dem andern Paare gebildeten Strecke liegt, der zugeordnete Punkt notwendig außerhalb derselben sich befinden muß.

Ist  $(ABCD) = -1$ , so findet man durch Ausrechnen, daß auch:

$$(1) \quad (ABCD) = (ABDC) = (BACD) = (BADC) \\ (CDAB) = (CDBA) = (DCAB) = (DCBA) = -1$$

ist. Bilden also  $A, B, C, D$  eine harmonische Gruppe, in dem Sinne, daß zunächst  $(ABCD) = -1$  ist, so kann man nicht nur jeden Punkt mit dem ihm zugeordneten vertauschen, sondern auch die beiden Paare zugeordneter Punkte mit einander und erhält immer wieder eine harmonische Gruppe. Es kommt also bei der Bildung einer solchen nur darauf an, welche Punkte einander zugeordnet werden, nicht aber, welches Paar oder welcher von zwei zugeordneten Punkten eines Paares vorangestellt wird. Man sagt daher auch, das Punktepaar  $A, B$  werde durch das Punktepaar  $C, D$  harmonisch getrennt und erkennt, daß dann auch  $A, B$  durch  $D, C$ , oder  $C, D$  durch  $B, A$  etc. harmonisch getrennt werden.

Ist ein Paar zugeordneter Punkte, etwa  $A, B$ , gegeben, so gehört zu jedem Punkte  $C$  ein ganz bestimmter zugeordneter

vierter harmonischer Punkt  $D$ . Um denselben zu konstruieren, ziehe man etwa durch  $A$  und  $B$  zwei beliebige Parallelen und durch  $C$  eine beliebige Transversale, welche diese Parallelen in den Punkten  $F$  und  $G$  treffen möge. Macht man dann  $BH = BG$ , so führt

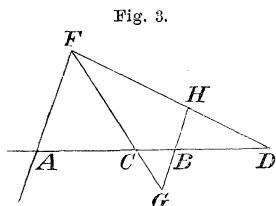


Fig. 3.

die Verbindungslinie  $FH$  zu dem vierten harmonischen Punkte  $D$ . In der That bilden  $C$  und  $D$  entgegengesetzt gleiche Teilverhältnisse mit  $AB$ .

Wir werden später noch eine andere Konstruktion kennen lernen, welche mit dem Lineal allein ausgeführt werden kann. Schreibt man die Gleichung:

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = -1$$

in der Form:

$$(2) \quad AC \cdot BD = AD \cdot CB$$

und bezeichnet mit  $M$  den Mittelpunkt von  $AB$ , so folgt:

$$(AM + MC)(BM + MD) = (AM + MD)(CM + MB).$$

Berücksichtigt man aber, daß  $AM = MB = -BM$  ist, so ergibt sich durch Ausrechnen:

$$(3) \quad MA^2 = MB^2 = MC \cdot MD.$$

Umgekehrt sieht man leicht ein, daß, wenn diese Relation besteht,  $A, B, C, D$  harmonische Punkte sein müssen, denn die Gleichung liefert zu gegebenen  $A, B, C$  nur ein einziges  $D$ .

Aufg. 1. Man schreibe die 24 Doppelverhältnisse der vier Punkte  $A, B, C, D$  auf und überzeuge sich durch Ausrechnen, daß sie in sechs Gruppen von je vier gleichen Doppelverhältnissen zerfallen.

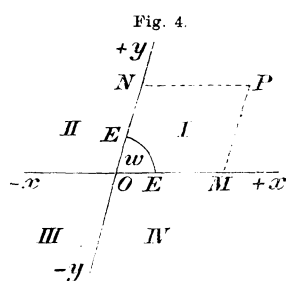
Aufg. 2. Man zeige, daß, wenn  $A, B, C, D$  eine harmonische Gruppe bilden, die 24 Doppelverhältnisse in drei Gruppen von je acht gleichen Doppelverhältnissen zerfallen. Den drei Gruppen entsprechen die Werte  $-1, 2, \frac{1}{2}$ .

Aufg. 3.  $A$  und  $B$  seien zwei zugeordnete Punkte einer harmonischen Gruppe  $A, B, C, D$ . Man überlege an Hand der Figur und mit Rücksicht auf die Tabelle in § 3, wie sich  $D$  bewegt, wenn  $C$  die unendliche Gerade durchläuft. Wo liegt insbesondere  $D$ , wenn  $C$  mit  $A$  oder mit  $B$  oder mit dem Mittelpunkt von  $AB$  zusammenfällt?

Aufg. 4. Bringe Gl. (2) auf die Form  $(x_1 - x_3)(x_2 - x_4) + (x_1 - x_4)(x_2 - x_3) = 0$ , insofern  $x_1, x_2, x_3, x_4$  die Abscissen von  $A, B, C, D$ , bezogen auf einen beliebigen Anfangspunkt, bedeuten. Fällt insbesondere der letztere mit dem Mittelpunkt der Strecke  $AB$  zusammen, d. h. ist  $x_1 = -x_2$ , so folgt  $x_1^2 = x_2^2 = x_3 x_4$ , d. h. Gl. (3).

### § 5. Bestimmung der Lage eines Punktes in der Ebene durch Koordinaten.

Bisher haben wir uns auf Punkte beschränkt, die auf einer und derselben Geraden lagen. Um nun in ähnlicher Weise auch die Lage der Punkte einer Ebene zu bestimmen, ziehen wir durch einen beliebigen Punkt  $O$  derselben zwei gerade Linien. Wir betrachten dann für die beiden Geraden im Sinne von § 1 den Punkt  $O$  als Anfangspunkt, wählen auf ihnen in derselben Entfernung von  $O$  je einen Einheitspunkt  $E$  und haben damit nicht nur für die beiden Geraden ein gemeinschaftliches Längenmaß  $OE$  geschaffen, sondern auch zugleich auf beiden eine positive und eine negative Richtung festgesetzt. Um die Vorstellungen zu fixieren, wollen wir die eine der



beiden Geraden, die wir die Abscissenachse nennen, in horizontaler Lage voraussetzen und ihre positive Hälfte als nach rechts gerichtet annehmen. Die andere Gerade, welche die Ordinatenachse heißt, ist dann gegen die erste unter einem gewissen Winkel  $w$  geneigt, ihre positive Hälfte werde als nach oben gerichtet angenommen.

Ist jetzt ein beliebiger Punkt  $P$  der Ebene gegeben, so ziehe man durch ihn zwei Parallelen  $PM$  und  $PN$  zu den Achsen. Die Lage von  $P$  ist dann vollständig durch die Lage der Punkte  $M$  und  $N$  gegeben, die wir in § 1 durch ganz bestimmte Zahlen zu fixieren gelernt haben.

Man nennt die mit ihrem Vorzeichen versehenen Achsenabschnitte  $OM$  und  $ON$  resp. die Abscisse und die Ordinate des Punktes  $P$ , beide zusammen seine Koordinaten. Die Ordinate  $ON$  von  $P$  kann man auch durch die gleiche und gleichgerichtete Strecke  $MP$  ersetzt denken, sodafs man die Parallele  $PN$  in der Figur entbehren kann. Der Punkt  $O$  heißt der Anfangspunkt der Koordinaten, seine Koordinaten sind gleich 0.

Man bezeichnet die Abscisse eines Punktes  $P$  meistens mit dem Buchstaben  $x$ , seine Ordinate mit  $y$  und nennt dem-

entsprechend auch die Abscissenachse die  $x$ -Achse, die Ordinatenachse die  $y$ -Achse. Sind mehrere Punkte gleichzeitig zu betrachten, so unterscheiden wir durch Indices:  $x, y; x_1, y_1; x_2, y_2; x', y'$  etc. bedeuten die Koordinaten der Punkte  $P; P_1; P_2; P'$  etc.

Wir wollen die Abscisse eines Punktes immer vor der Ordinate nennen, sodafs z. B. „der Punkt  $(a, b)$ “ der Punkt mit der Abscisse  $a$  und der Ordinate  $b$  ist.

Nach diesen Vorbereitungen erkennt man jetzt die Richtigkeit des folgenden Satzes:

Jedem Punkte der unbegrenzten Ebene entspricht ein ganz bestimmtes Zahlenpaar, nämlich seine Koordinaten und umgekehrt jedem Zahlenpaar entspricht ein ganz bestimmter Punkt der Ebene, nämlich derjenige, dessen Koordinaten resp. jenen beiden Zahlen gleich sind.

Durch die beiden Koordinatenachsen wird die ganze Ebene in vier Teile I, II, III, IV zerlegt. In I sind Abscisse und Ordinate eines jeden Punktes positiv, in II resp. negativ und positiv, in III beide negativ und in IV resp. positiv und negativ.

Je nachdem der von den positiven Halbachsen eingeschlossene Winkel  $w$  ein rechter ist oder nicht, spricht man von rechtwinkligen oder schiefwinkligen Koordinaten; beide heifsen auch Parallelkoordinaten oder Cartesische Koordinaten (Cartesius 1596—1650).

Natürlich gelten alle Sätze, die sich auf schiefwinklige Systeme beziehen, auch für rechtwinklige, aber nicht umgekehrt. Wenn daher in der Folge eine Untersuchung sich speziell auf rechtwinklige Koordinaten beziehen soll, so wird dies stets besonders hervorgehoben werden, im andern Falle kann man rechtwinklige oder schiefwinklige Koordinaten der Betrachtung zu Grunde legen.

Aufg. 1.\*) Bestimme die Punkte  $(2, 3); (-1, 4); (-2, -\frac{1}{2}); (1, -5); (\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}})$ .

---

\*) Bei den Zeichnungen, die zu allen Aufgaben anzufertigen sind, bedient man sich zweckmässig eines in kleine Quadrate eingeteilten Papiers.

Aufg. 2. Durch welche Koordinaten sind die Punkte der  $x$ -Achse resp. der  $y$ -Achse ausgezeichnet?

Aufg. 3. Welche Beziehung besteht zwischen den beiden Koordinaten eines Punktes, der auf einer der beiden Geraden liegt, welche die Winkel der Achsen halbieren?

Aufg. 4. Durch welche Koordinaten sind die Punkte einer Geraden charakterisiert, welche zur  $x$ -Achse resp.  $y$ -Achse parallel ist?

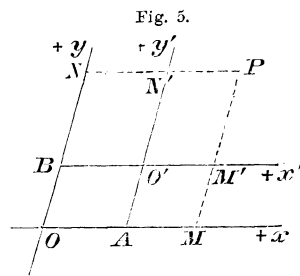
Aufg. 5. Durch  $O$  sei eine beliebige Gerade gezogen. Welche Relation besteht dann zwischen den Koordinaten  $x_1, y_1$  und  $x_2, y_2$  zweier Punkte  $P_1$  und  $P_2$  dieser Geraden?

Aufg. 6. Welches ist die gegenseitige Lage der Punkte  $(a, b)$ ;  $(-a, -b)$ ;  $(-a, b)$ ;  $(a, -b)$ ?

Aufg. 7. Ein Punkt  $P$  besitze die Koordinaten  $x, y$ . Wie heißen seine Koordinaten, wenn man die Achsenrichtungen wechselt, oder wenn man die frühere positive  $x$ -Achse neuerdings zur positiven  $y$ -Achse und die frühere positive  $y$ -Achse neuerdings etwa zur negativen  $x$ -Achse wählt, oder wenn man die Achsen irgendwie anders vertauscht?

### § 6. Koordinatentransformation durch Verlegung des Anfangspunktes. (Parallelverschiebung.)

In einem beliebigen Koordinatensysteme mit dem Anfangspunkte  $O$  seien zwei Punkte  $P$  und  $O'$  mit den Koordinaten  $x, y$  resp.  $a, b$  gegeben. Man lege durch  $O'$  ein neues Koordinatensystem, dessen positive Halbachsen parallel und gleichgerichtet mit den positiven Halbachsen des alten Systems sind, sodafs das eine System mit dem andern nach Lage und Richtung der Halbachsen durch blofse Parallelverschiebung zur Deckung gebracht werden kann. Der Punkt  $P$  besitzt dann in Bezug auf das neue System zwei Koordinaten  $O'M'$  und  $O'N'$ , die mit  $x'$  und  $y'$  bezeichnet werden mögen. Dem entsprechend wollen wir die neuen durch  $O'$  gehenden Achsen



auch die  $x'$ -Achse und  $y'$ -Achse nennen. Aus der Figur entnimmt man dann, da in Bezug auf Größe und Richtung  $O'M' = AM = OM - OA$  und  $O'N' = BN = ON - OB$  ist, die Relationen:

$$(1) \quad x' = x - a, \quad y' = y - b,$$

oder:

$$(2) \quad x = x' + a, \quad y = y' + b.$$

Aufg. 1. Man überzeuge sich, daß diese Relationen zwischen den alten und den neuen Koordinaten stets gelten, in welchen der vier Teile der Ebene auch  $O'$  und  $P$  liegen und welche gegenseitige Lage sie auch zu einander haben mögen.

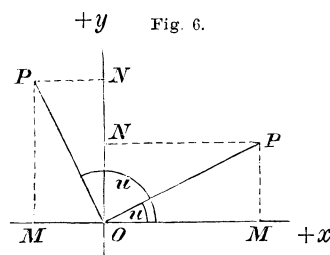
Aufg. 2. In einem rechtwinkligen Koordinatensysteme seien die Koordinaten eines Punktes  $(x, y)$  durch die Relation  $x^2 + y^2 = r^2$  verbunden. In welche Relation verwandelt sich diese, wenn man bei unveränderten Achsenrichtungen den Punkt  $(p, q)$  zum Anfangspunkte wählt?

### § 7. Polarkoordinaten.

In Bezug auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz sei ein Punkt  $P$  durch seine Koordinaten  $OM = x$ ,  $ON = y$  gegeben.

(In der Figur sind absichtlich zwei Punkte mit denselben Bezeichnungen gewählt, damit man erkenne, daß die folgenden Erörterungen von der speziellen Lage des Punktes ganz unabhängig sind. Der Leser möge also den einen oder den andern der beiden Punkte der Betrachtung zu Grunde legen.)

In dem rechtwinkligen Dreiecke  $OMP$  sind die beiden Katheten  $OM = x$ ,  $MP = y$ ; die Hypotenuse, also die Entfernung des Punktes  $P$  vom Anfangspunkte, werde mit  $r$  und der Winkel, welchen  $r$  mit der positiven  $x$ -Achse einschließt, mit  $u$  bezeichnet. Dabei wollen wir genauer unter  $u$  den Winkel verstehen, um den sich die positive  $x$ -Achse im positiven Sinne drehen muß, um mit dem Halbstrahle  $OP$  zusammenzufallen.





Unter dem positiven Drehungssinne verstehen wir dabei ein für allemal denjenigen, um welchen die positive  $x$ -Achse um den Anfangspunkt  $O$  sich drehen muß, um, den ersten Quadranten durchstreichend, nach der positiven  $y$ -Achse zu gelangen.

Aus dem rechtwinkligen Dreiecke  $OMP$  folgt jetzt:

$$(1) \quad x = r \cos u, \quad y = r \sin u,$$

und diese Gleichungen gelten, in welchem der vier Quadranten auch  $P$  angenommen werde, wenn man nur berücksichtigt, daß  $\cos u$  und  $\sin u$  in den vier verschiedenen Quadranten dieselben Vorzeichenkombinationen darbieten, wie  $x$  und  $y$ .

Die Entfernung  $r$  werde dabei stets als positiv angesehen. Aus den Gleichungen (1) ergibt sich durch Auflösen:

$$(2) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos u = \frac{x}{r}, \quad \sin u = \frac{y}{r}, \quad \operatorname{tg} u = \frac{y}{x},$$

wie auch unmittelbar die Figur zeigt.

Man nennt  $r$  und  $u$  die Polarkoordinaten von  $P$ , speziell  $r$  den Radius Vektor,  $u$  die Anomalie von  $P$ . Die Größen  $r$  und  $u$  bestimmen die Lage von  $P$  ebenso eindeutig, wie  $x$  und  $y$ . Es folgt dies direkt aus der Figur, aber auch daraus, daß sich vermöge der Gleichungen (1) und (2)  $x$  und  $y$  durch  $r$  und  $u$  und umgekehrt in eindeutiger Weise bestimmen lassen. Der Radius  $r$  kann alle Werte von 0 bis  $\infty$  annehmen, die Anomalie  $u$  alle Werte von  $0^\circ$  bis  $360^\circ$ .

Aufg. 1. Wo liegen alle die Punkte, für welche  $r = a$ , oder alle diejenigen, für welche  $u = u_0$  ist, insofern  $a$  und  $u_0$  gegebene, feste Werte besitzen?

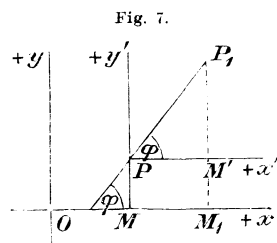
Aufg. 2. Welches sind die Polarkoordinaten der Punkte  $(2, 0)$ ;  $(0, 3)$ ;  $(-4, 0)$ ;  $(0, -1)$ ;  $(3, -3)$ ;  $(1, 1)$ ;  $(-2, 2)$ ?

Aufg. 3. Welches sind die rechtwinkligen Koordinaten der Punkte, deren Polarkoordinaten resp.  $r = 1$ ,  $u = 45^\circ$ ;  $r = 3$ ,  $u = 210^\circ$ ;  $r = 2$ ;  $u = 315^\circ$  sind?

§ 8. Aus den rechtwinkligen Koordinaten zweier Punkte  $P$  und  $P_1$  ihre Entfernung und die Neigung ihrer Verbindungslinie gegen die  $x$ -Achse zu bestimmen.

Die als positiv gedachte Entfernung  $PP_1$  werde mit  $d$  bezeichnet, der Winkel, den  $PP_1$  mit der positiven Richtung

der  $x$ -Achse bildet, mit  $\varphi$ . Dabei wollen wir genauer unter dem Winkel, den eine Gerade mit der positiven Richtung der  $x$ -Achse bildet und der also die Richtung der Geraden bestimmt, denjenigen Winkel verstehen, welchen die  $x$ -Achse, im positiven Sinne um ihren Schnittpunkt mit der Geraden sich drehend, beschreiben muß, um in die Lage jener Geraden zu gelangen. Der Winkel  $\varphi$  wird auch kurz der Neigungswinkel der Geraden genannt.



Wir legen durch  $P$  als Anfangspunkt ein neues Koordinatensystem parallel und gleichgerichtet mit dem alten (§ 6).

Sind dann  $x, y$  und  $x_1, y_1$  die gegebenen, auf das alte System bezogenen Koordinaten von  $P$  und  $P_1$ , so werden jetzt die Koordinaten von  $P_1$  in Bezug auf das neue System lauten:

$$x' = x_1 - x, \quad y' = y_1 - y.$$

Da aber jetzt gleichzeitig die zu bestimmenden Größen  $d$  und  $\varphi$  im Sinne von § 7 die Polarkoordinaten von  $P_1$  in Bezug auf das neue System sind\*), so ist:

$$(1) \quad d = \sqrt{x'^2 + y'^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y'}{x'}, \quad \text{folglich:}$$

$$(2) \quad d = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}.$$

Durch diese Formeln werden mit Berücksichtigung der für  $\varphi$  getroffenen Festsetzung  $d$  und  $\varphi$  eindeutig bestimmt. Zu beachten ist noch, daß die Formeln sich nicht ändern, wenn man  $x_1, y_1$  resp. mit  $x, y$  vertauscht; es ist daher gleichgültig, welchen der beiden Punkte man als ersten betrachtet.

Aufg. 1. Man bestimme die Entfernung der beiden Punkte  $(5, -3)$ ;  $(-2, 1)$  und den Winkel  $\varphi$  ihrer Verbindungslinie.

\*) Nach der vorhergehenden Festsetzung bedeutet  $\varphi$  immer einen Winkel zwischen  $0^\circ$  und  $180^\circ$ . Unter Umständen ist daher die Anomalie von  $P_1$  in Bezug auf das neue System nicht  $\varphi$ , sondern  $180^\circ + \varphi$ ; da aber  $\operatorname{tg}(180^\circ + \varphi) = \operatorname{tg} \varphi$  ist, so gelten die Formeln für  $d$  und  $\operatorname{tg} \varphi$  doch ganz allgemein.

Aufg. 2. Die Koordinaten der Ecken eines Dreiecks seien  $(2, 1)$ ;  $(-5, 3)$ ;  $(1, -4)$ . Man bestimme die Längen und die Richtungen der drei Seiten.

Aufg. 3.  $(x_1, y_1)$  und  $(x_2, y_2)$  seien zwei feste Punkte. Welche Gleichung muß zwischen den Koordinaten  $x, y$  eines Punktes bestehen, damit derselbe von jenen beiden Punkten gleiche Abstände habe? Wo liegen alle diese Punkte?

Aufg. 4. Auf der  $x$ -Achse seien die beiden Punkte  $A$  und  $A'$ , mit den Abscissen  $a$  und  $-a$ , auf der  $y$ -Achse  $B$  und  $B'$ , mit den Ordinaten  $b$  und  $-b$ , gegeben. Man bestimme die Richtungen der Seiten des Parallelogramms  $ABA'B'$ .

§ 9. Aus den gegebenen Koordinaten  $x_1, y_1$  und  $x_2, y_2$  zweier Punkte  $P_1$  und  $P_2$  die Koordinaten  $x, y$  desjenigen Punktes  $P$  der Verbindungsline zu finden, der mit der Strecke  $P_1P_2$  ein gegebenes Teilverhältnis  $\lambda$  bildet.

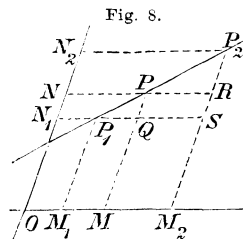
Da das Teilverhältnis  $\lambda$  unabhängig davon ist, welche Richtung der Geraden  $P_1P_2$  man als die positive ansieht

(§ 3, Aufg. 2), so wollen wir uns einer besonderen Festsetzung darüber enthalten und nur in Rücksicht ziehen, daß Strecken, die in entgegengesetztem Sinne durchlaufen werden (wie etwa  $P_1P_2$  und  $P_2P_1$ ), mit entgegengesetzten Zeichen zu versehen sind.

Eine aufmerksame Betrachtung der Figur zeigt nun, daß mit Rücksicht sowohl auf die absoluten Längen wie auf die Vorzeichen der betreffenden Strecken die Proportion gilt:

$$P_1P : PP_2 = M_1M : MM_2 = N_1N : NN_2,$$

d. h. daß  $M_1M_2$  durch  $M$  und  $N_1N_2$  durch  $N$  in demselben Teilverhältnis  $\lambda$  geteilt werden, wie  $P_1P_2$  durch  $P$ . Nach § 3 ist dann aber das  $x$  von  $M$  gleich  $\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$  und dem entsprechend das  $y$  von  $N$  gleich  $\frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$ . Es sind daher die Koordinaten von  $P$ :



$$(1) \quad x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Umgekehrt findet man hieraus wieder:

$$(2) \quad \lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Die Gesamtheit der durch (1) definierten Punkte, d. h. die Punkte der Geraden  $P_1P_2$ , nennt man eine Punktreihe.

Für  $\lambda = 1$  erhält man die Koordinaten des Mittelpunktes der Strecke  $P_1P_2$ , nämlich  $\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}$ .

Aufg. 1. Man bestimme die Teilverhältnisse der beiden Punkte, in denen die Gerade  $P_1P_2$  die Achsen schneidet.

Aufg. 2. Ein Dreieck ist gegeben durch die Koordinaten  $(2, 5); (-3, 7); (1, -2)$  seiner Ecken. Man bestimme die Koordinaten der Mittelpunkte der Seiten.

Aufg. 3. Der Schwerpunkt  $S$  einer Dreiecksfläche teilt die Verbindungslinie  $P_1R_1$  einer Ecke  $P_1$  mit dem Mittelpunkt  $R_1$  der Gegenseite bekanntlich in dem Verhältnisse  $2:1$ . Man soll die Koordinaten von  $S$  aus den Koordinaten  $x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3$  von  $P_1, P_2, P_3$  berechnen.

Aufg. 4. Man suche für das Dreieck  $(2, -5); (1, 2); (-3, 4)$  die Koordinaten des Punktes, in welchem sich die Verbindungslinien der Ecken mit den Mittelpunkten der Gegenseiten, die sogenannten Mittellinien, treffen. (Der gesuchte Punkt ist der Schwerpunkt.)

Aufg. 5. Durch die Ecken  $(x_1, y_1); (x_2, y_2); (x_3, y_3)$  eines Dreiecks ziehe man Parallelen zu den Gegenseiten und bestimme die Koordinaten der Ecken des so entstehenden Dreiecks.

Aufg. 6. In welcher Beziehung steht der Punkt  $(x, y)$  zu dem Punkte  $\left(\frac{x}{1+\lambda}, \frac{y}{1+\lambda}\right)$ ?

§ 10. Den Inhalt des Dreiecks zu bestimmen, welches der Anfangspunkt mit zwei Punkten  $P_1$  und  $P_2$  bildet.

Die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  mögen die rechtwinkligen Koordinaten  $x_1, y_1; x_2, y_2$  und die Polarkoordinaten  $r_1, u_1; r_2, u_2$  besitzen. Sei zunächst  $u_2 > u_1$ , sodafs die Punkte

$O, P_1, P_2$ , wie in der Figur, im positiven Drehungssinne aufeinander folgen. Dann ist der Inhalt  $J$  des Dreiecks  $OP_1P_2$  gleich:

Fig. 9.  $J = \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin(u_2 - u_1)$   
 $= \frac{1}{2} r_1 r_2 (\sin u_2 \cos u_1 - \cos u_2 \sin u_1)$   
 oder mit Rücksicht auf die Formeln (2) von § 7:

$$J = \frac{1}{2} r_1 r_2 \left( \frac{y_2}{r_2} \frac{x_1}{r_1} - \frac{x_2}{r_2} \frac{y_1}{r_1} \right)$$

d. h.:

$$(1) \quad J = \frac{1}{2} (x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Ist dagegen  $u_1 > u_2$ , d. h. folgen die Punkte  $O, P_1, P_2$  im negativen Drehungssinne aufeinander, so ist:

$$J = \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin(u_1 - u_2)$$

und man erhält alsdann:

$$(2) \quad J = \frac{1}{2} (x_2 y_1 - x_1 y_2) = -\frac{1}{2} (x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Um nun diese lästige Unterscheidung, ob  $u_2$  größer oder kleiner ist als  $u_1$ , zu vermeiden, wollen wir ein für allemal festsetzen, daß der Inhalt des Dreiecks  $OP_1P_2$  (man beachte die Reihenfolge der Buchstaben) durch die einzige Formel:

$$(3) \quad J = \frac{1}{2} (x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

gegeben werde.

Diese Festsetzung enthebt uns dann aber nicht nur jener Unterscheidung, sondern sie liefert zugleich eine thatsächliche Vervollständigung unsrer Erkenntnis:

Der absolute Wert des Ausdrucks  $\frac{1}{2} (x_1 y_2 - x_2 y_1)$  giebt uns den absoluten Flächeninhalt des in Rede stehenden Dreiecks an; gleichzeitig aber belehrt uns, ohne daß wir nötig haben, die Figur anzuschauen, das Vorzeichen des Ausdrucks, in welchem Sinne die Punkte  $O, P_1, P_2$  aufeinander folgen. Ist nämlich  $\frac{1}{2} (x_1 y_2 - x_2 y_1)$  positiv, so ist dies ein Zeichen dafür, daß die Punkte  $O, P_1, P_2$  im positiven Sinne aufeinander folgen; ist dagegen dieser Ausdruck negativ, so schließen wir, daß das Dreieck im negativen Sinne durchlaufen wird, wenn wir von  $O$  über  $P_1$  nach  $P_2$  gelangen.

Liegen die Punkte  $O, P_1, P_2$  in einer Geraden, so ist  $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$  und umgekehrt.

Aufg. 1. Man zeichne verschiedene Dreiecke  $OP_1 P_2$  (mit Berücksichtigung aller Quadranten) und übe sich, das Vorzeichen der einzelnen Dreiecke jedesmal aus der Figur abzulesen. Die Dreiecke  $OP_2 P_1$  haben dann immer das entgegengesetzte Zeichen.

Aufg. 2. Zeige, daß infolge unsrer Festsetzung der Inhalt des Dreiecks  $OP_2 P_1$  durch  $\frac{1}{2}(x_2 y_1 - x_1 y_2)$  dargestellt wird.

Aufg. 3.  $P_1$  und  $P_2$  mögen die Koordinaten  $-5, 1$  und  $3, 4$  besitzen. Berechne den Inhalt des Dreiecks  $OP_1 P_2$  und diskutiere das Vorzeichen.

Aufg. 4. Berechne den Inhalt des Dreiecks  $(0, 0); (a, 0); (0, b)$ .

Aufg. 5.  $P_1$  habe die Koordinaten  $2, 3$ ; auf welcher Seite der Geraden  $OP_1$  liegt der Punkt  $P_2$  mit den Koordinaten  $4, 3$ ?

Aufg. 6. Drücke die Bedingung dafür aus, daß der Punkt mit den Koordinaten  $x, y$  auf der Verbindungslinie von  $O$  mit  $(x_1, y_1)$  liegt.

Aufg. 7. Beweise, daß bei schiefwinkligen Koordinaten mit dem Achsenwinkel  $w$  der Inhalt des Dreiecks  $OP_1 P_2$  durch  $\frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1) \sin w$  dargestellt wird. Es ist nämlich, wenn dieselben Bezeichnungen wie im Texte benutzt werden:

$$\sin u_1 = \frac{y_1 \sin w}{r_1}, \quad \cos u_1 = \frac{x_1 + y_1 \cos w}{r_1} \text{ etc.}$$

§ 11. Den Inhalt eines beliebigen Dreiecks  $P_1 P_2 P_3$  aus den Koordinaten der Ecken zu berechnen.

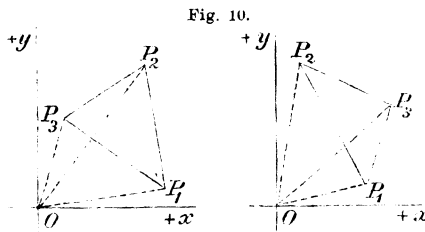
Man verbinde die drei Punkte  $P_1, P_2, P_3$ , deren rechtwinklige Koordinaten resp.  $x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3$  seien, mit dem Anfangspunkte  $O$ , so

erhält man drei Dreiecke  $OP_1 P_2, OP_2 P_3, OP_3 P_1$ , deren Inhalt resp. durch:

$$\frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1),$$

$$\frac{1}{2}(x_2 y_3 - x_3 y_2),$$

$$\frac{1}{2}(x_3 y_1 - x_1 y_3)$$



bestimmt ist. Nimmt man nun jedes der Dreiecke mit dem ihm zukommenden Vorzeichen und bezeichnet den Inhalt der

Dreiecke  $P_1P_2P_3$ ,  $OP_1P_2$ ,  $OP_2P_3$ ,  $OP_3P_1$  kurz mit  $J, J_{12}, J_{23}, J_{31}$ , so zeigt eine aufmerksame Betrachtung der Figur, daß stets, wie auch das Dreieck  $P_1P_2P_3$  liegen mag, die Gleichung gilt:

$$(1) \quad J = J_{12} + J_{23} + J_{31},$$

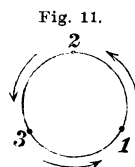
wenn nur die Vorzeichen richtig beachtet werden, und daß ferner  $J$  positiv oder negativ ausfällt, je nachdem  $P_1, P_2, P_3$  im positiven Sinne (wie bei der ersten Figur), oder im negativen Sinne (wie bei der zweiten Figur) aufeinander folgen.

Indem wir so für den Flächeninhalt  $J$  des Dreiecks  $P_1P_2P_3$  (man beachte die Reihenfolge der Buchstaben) stets die Formel erhalten:

$$(2) \quad J = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3),$$

erkennen wir, daß uns dieser Ausdruck für  $J$  nicht nur durch seinen absoluten Wert den absoluten Flächeninhalt des Dreiecks angiebt, sondern auch gleichzeitig durch sein Vorzeichen, in welchem Sinne die drei Punkte  $P_1, P_2, P_3$  aufeinander folgen. Die in § 10 getroffene Festsetzung macht also unsere Formeln inhaltsreicher.

Anmerkung. Bei dem Bau der für  $J$  gefundenen Formel tritt eine gewisse Gesetzmäßigkeit zu Tage, der wir noch vielfach begegnen werden und die namentlich auch für das Gedächtnis eine Erleichterung bietet. Man bemerkt nämlich, daß die beiden Summanden  $x_2y_3 - x_3y_2$  und  $x_3y_1 - x_1y_3$  dadurch aus dem ersten Summanden  $x_1y_2 - x_2y_1$  hervorgehen, daß man die Indices 1, 2, 3 durch 2, 3, 1 beziehungsweise 3, 1, 2 ersetzt. Die nebenstehende Figur rechtfertigt die Bezeichnung „cyklische Vertauschung“ der Indices.



Aufg. 1. Man leite die Formel für  $J$  dadurch ab, daß man durch  $P_3$  ein neues Achsensystem parallel und gleichgerichtet mit dem alten einführt und dann auf die neuen Koordinaten  $x'_1 = x_1 - x_3$ ,  $y'_1 = y_1 - y_3$  und  $x'_2 = x_2 - x_3$ ,  $y'_2 = y_2 - y_3$  von  $P_1$  und  $P_2$  die Formel  $J = \frac{1}{2}(x'_1y'_2 - x'_2y'_1)$  anwendet.

Aufg. 2. Man lege durch einen beliebigen Punkt  $O'$  mit

den Koordinaten  $a, b$  ein neues Achsensystem parallel und gleichgerichtet mit dem alten und beweise, daß in dem neuen Systeme die Formel für  $J$  genau denselben Flächeninhalt ergibt, wie in dem alten, daß dieselbe also von dem Koordinatensysteme unabhängig ist.

Aufg. 3. Man bestimme den Inhalt des Dreiecks  $(3, 1); (4, -2); (-1, -2)$  und diskutierte das Vorzeichen.

Aufg. 4. Man überzeuge sich, daß die Dreiecke  $P_2P_3P_1$  und  $P_3P_1P_2$  dasselbe Vorzeichen haben wie  $P_1P_2P_3$ , daß dagegen den Dreiecken  $P_1P_3P_2$ ,  $P_2P_1P_3$ ,  $P_3P_2P_1$  das entgegengesetzte Zeichen zukommt.

Aufg. 5. Welche Bedingung muß zwischen den Koordinaten der drei Punkte  $P_1, P_2, P_3$  stattfinden, damit diese in einer Geraden liegen?

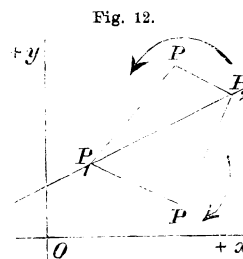
Aufg. 6. Beweise, daß für schiefwinklige Koordinaten der Inhalt des Dreiecks  $P_1P_2P_3$  durch:

$$\frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3) \sin w$$

ausgedrückt wird (§ 10, Aufg. 7).

## § 12. Folgerungen. Kriterien für die Lage eines Punktes in Bezug auf eine Gerade.

In einem rechtwinkligen Koordinatensysteme sei eine Gerade durch die beiden Punkte  $P_1, P_2$  gegeben. Dieselbe zerlegt dann die ganze Ebene in zwei Teile, die wir auf Grund unsrer Festsetzungen in folgender Weise von einander zu unterscheiden im Stande sind. Alle Punkte  $P$  auf der einen Seite der Geraden sind dadurch ausgezeichnet, daß in dem zugehörigen Dreiecke die Ecken  $P_1, P_2, P$  im positiven Sinne, alle Punkte  $P$  auf der andern Seite der Geraden dadurch, daß in dem zugehörigen Dreiecke die Ecken  $P_1, P_2, P$  im negativen Sinne aufeinander folgen. Wählen wir daher auf der ersten Seite, die wir kurz die positive nennen wollen, einen beliebigen Punkt  $P$  mit den Koordinaten





$x, y$  und bilden (indem wir jetzt  $x_3, y_3$  durch  $x, y$  ersetzen) den Ausdruck:

$$(1) \quad J = \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y - x y_2 + x y_1 - x_1 y),$$

so wird dieser Ausdruck allemal positiv ausfallen; nehmen wir dagegen einen Punkt  $P$  mit den Koordinaten  $x, y$  auf der andern Seite, die wir als die negative bezeichnen können, so wird der entsprechende Ausdruck stets mit dem negativen Zeichen behaftet sein. Wir besitzen also in dem Ausdrucke:

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y - x y_2 + x y_1 - x_1 y,$$

dem wir auch die Form:

$$x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2) + x_1 y_2 - x_2 y_1$$

geben können, ein wichtiges Unterscheidungsmittel für die beiden Seiten der Geraden  $P_1 P_2$ . Für jedes Wertepaar  $x, y$  nimmt der charakteristische Ausdruck einen ganz bestimmten Wert an und zwar einen positiven für alle Punkte der einen Seite, einen negativen für alle Punkte der andern Seite. Bedeutet  $(x, y)$  einen Punkt der Geraden  $P_1 P_2$  selbst, so wird der Ausdruck (der ja den doppelten Flächeninhalt des entsprechenden Dreiecks darstellt) allemal Null, und umgekehrt, wenn der Ausdruck gleich Null wird, so ist dies ein sicheres Zeichen dafür, daß der Punkt  $(x, y)$  auf der Geraden liegt.

Es ist daher:

$$(2) \quad x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2) + x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$$

eine Gleichung, welche allemal, aber auch nur dann, erfüllt wird, wenn  $x, y$  die Koordinaten eines Punktes der Geraden bedeuten.

Aufg. 1. Beweise, daß der zuletzt ausgesprochene Satz auch unverändert für schiefwinklige Koordinaten gilt.

Aufg. 2.  $P_1, P_2, P$  mögen die rechtwinkligen Koordinaten 2, 5; -3, 4; 1, 1 haben. Auf welcher Seite der Geraden  $P_1 P_2$  liegt der Punkt  $P$ ? Liegt der Anfangspunkt  $O$  auf derselben Seite?

Aufg. 3. Prüfe, ob die Punkte  $(1, -1)$ ;  $(-2, 5)$ ;  $(7, -6)$ ;  $(\frac{1}{2}, -2)$  auf der Geraden  $P_1 P_2$  der vorhergehenden Aufgabe liegen.

**Aufg. 4.** In welchen Punkten trifft dieselbe Gerade  $P_1P_2$  die Achsen und die Winkelhalbierenden derselben? (§ 5, Aufg. 2 und 3.)

**Aufg. 5.** Welcher Gleichung genügen die Koordinaten eines jeden Punktes der Geraden  $P_1P_2$ , wenn  $P_1$  und  $P_2$  resp. die Koordinaten 4, 2 und  $-3, 7$  haben?

### § 13. Den Inhalt eines Vielecks aus den Koordinaten seiner Ecken zu berechnen.

Die  $n$  Ecken  $P_1, P_2 \dots P_n$  mögen die rechtwinkligen Koordinaten  $x_1, y_1; x_2, y_2; \dots x_n, y_n$  besitzen. Verbindet man, wie in § 11, die  $n$  Eckpunkte mit dem Anfangspunkte  $O$ , so erhält man  $n$  Dreiecke  $OP_1P_2, OP_2P_3, \dots OP_nP_1$ . Bei genauer Berücksichtigung der Vorzeichen aller dieser Dreiecke ergibt sich, als einfache Ausdehnung der in § 11 gewonnenen Resultate, für den Inhalt  $J$  die Gleichung:

$$(1) \quad J = OP_1P_2 + OP_2P_3 + \dots + OP_nP_1,$$

d. h.:

$$(2) \quad J = \frac{1}{2} \{ x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + \dots + x_{n-1}y_n - x_ny_{n-1} + x_ny_1 - x_1y_n \},$$

und zwar ist dieser Ausdruck positiv oder negativ, je nachdem die Punkte  $P_1, P_2, \dots P_n$  im positiven oder im negativen Sinne aufeinander folgen. Die für  $J$  gefundene Formel bleibt bestehen, auch wenn das Vieleck einspringende Ecken hat oder ein überschlagenes ist.

**Aufg. 1.** Man beweise (wie § 11, Aufg. 2), daß die Formel für  $J$  von dem Koordinatensysteme unabhängig ist.

**Aufg. 2.** Bestimme den Inhalt des Vierecks (1, 2);  $(-3, 4)$ ;  $(-1, -1)$ ;  $(3, -2)$ .

**Aufg. 3.** Beweise, daß für schiefwinklige Koordinaten in dem Ausdrucke für  $J$  einfach der Faktor  $\sin w$  hinzutritt.

**Aufg. 4.** Bestimme für schiefwinklige Koordinaten ( $w = 60^\circ$ ) den Inhalt des Vierecks  $(2, 1)$ ;  $(4, -3)$ ;  $(-2, -5)$ ;  $(-1, 4)$ .

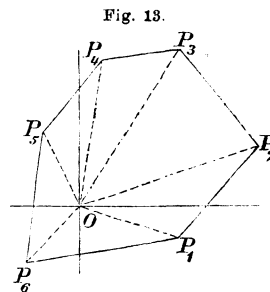


Fig. 13.

Aufg. 5. Bestimme für rechtwinklige Koordinatenachsen den Inhalt des Achtecks:

$$(1, 0); \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right); (0, 1); \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right); (-1, 0);$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right); (0, -1); \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

#### § 14. Bestimmung des Abstandes eines Punktes von einer Geraden.

Die Lage einer Geraden ist vollständig bestimmt, wenn man ihren Abstand  $\delta$  vom Anfangspunkte eines beliebigen Koordinatensystems und den Winkel  $\alpha$  kennt, welchen  $\delta$  mit der positiven Richtung der  $x$ -Achse einschließt. Unter  $\alpha$  verstehen wir dabei genauer denjenigen Winkel zwischen  $0^\circ$  und  $360^\circ$ , um den sich die positive  $x$ -Achse im positiven Sinne drehen muß, um mit dem durch die Richtung von  $OR = \delta$  bestimmten Halbstrahle zusammenzufallen. Der Abstand  $\delta$ , den wir stets als positiv ansehen, schließt dann mit der positiven  $y$ -Achse den Winkel  $\beta = w - \alpha$  ein, insofern  $w$  den Achsenwinkel bedeutet.

In der Figur ist  $PQ$  der zu bestimmende Abstand  $d$  des gegebenen Punktes  $P$ , mit den Koordinaten  $x, y$ , von der durch  $\delta$  und  $\alpha$  bestimmten Geraden. Man liest dann unmittelbar die Relation  $d = OR - OS = \delta - OS$  ab. Nun ist:

$$OS = OK + KS = OK + ML.$$

Aus den rechtwinkligen Dreiecken  $OMK$ , mit dem Winkel  $\alpha$  bei  $O$ , und  $MLP$ , mit dem Winkel  $\beta$  bei  $M$ , folgt dann aber:

$$OK = OM \cos \alpha = x \cos \alpha,$$

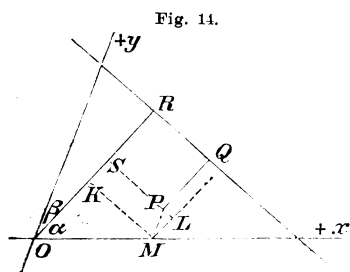
$$ML = MP \cos \beta = y \cos \beta,$$

also:

$$OS = x \cos \alpha + y \cos \beta$$

und daher:

$$(1) \quad d = - (x \cos \alpha + y \cos \beta - \delta).$$



Hätten wir in der Figur den Punkt  $P$  auf der andern Seite der Geraden gewählt, so wäre bei analoger Bezeichnung  $d = OS - OR$ , und wir hätten dann die Formel:

$$(2) \quad d = + (x \cos \alpha + y \cos \beta - \delta)$$

erhalten.

Um nun diese Unterscheidungen zu vermeiden, wollen wir ein für allemal festsetzen, daß der Abstand eines Punktes  $P$ , mit den Koordinaten  $x, y$ , von der durch  $\delta$  und  $\alpha$  charakterisierten Geraden durch die einzige Formel:

$$(3) \quad d = - (x \cos \alpha + y \cos \beta - \delta)$$

gegeben werde. Auch hier enthebt uns diese Festsetzung nicht nur jener lästigen Unterscheidung, sondern sie macht auch die Formel inhaltsreicher: durch den absoluten Wert von  $d$  erhalten wir die absolute Länge des gesuchten Abstandes, gleichzeitig aber giebt uns das Vorzeichen von  $d$  an, auf welcher Seite der Geraden der Punkt  $P$  liegt. Ist  $d$  positiv, so befindet sich  $P$  auf derselben Seite wie der Anfangspunkt  $O$ , die von  $P$  und  $O$  gefälltten Lote  $d$  und  $\delta$  sind dann gleichgerichtet; ist  $d$  dagegen negativ, so liegt  $P$  auf der entgegengesetzten Seite,  $d$  und  $\delta$  sind entgegengesetzt gerichtet. Die Gerade trennt also die Punkte, für welche der Ausdruck:

$$d = - (x \cos \alpha + y \cos \beta - \delta)$$

einen positiven Wert besitzt, von denjenigen, für welche er einen negativen Wert annimmt.

Die Punkte der Geraden selbst, und nur diese, sind durch  $d = 0$  ausgezeichnet. Der Ausdruck  $x \cos \alpha + y \cos \beta - \delta$  verschwindet daher jedesmal, aber auch nur dann, wenn  $x, y$  die Koordinaten eines Punktes der Geraden sind, oder:

Die Gleichung  $x \cos \alpha + y \cos \beta - \delta = 0$  ist eine Gleichung, welche von den Koordinaten  $x, y$  eines jeden Punktes der Geraden, aber auch nur von solchen, erfüllt wird.

Ist das Koordinatensystem rechtwinklig, also  $\beta = 90^\circ - \alpha$ , so ist  $d = - (x \cos \alpha + y \sin \alpha - \delta)$ ; und die eben besprochene charakteristische Gleichung lautet dann:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - \delta = 0.$$

Aufg. 1. Diskutiere die Lage der vier Geraden, welche durch  $\delta = 5$  und resp.  $\alpha = 30^\circ, 120^\circ, 210^\circ$  und  $300^\circ$  ausgezeichnet sind.

Aufg. 2. In einem rechtwinkligen Systeme sei eine Gerade durch  $\delta = 2$ ,  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ ,  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  bestimmt. Welchen Abstand von ihr hat der Punkt  $(-3, 5)$ ? Interpretiere das Zeichen.

Aufg. 3. Welcher Gleichung genügen die Koordinaten eines jeden Punktes der vorhergehenden Geraden?

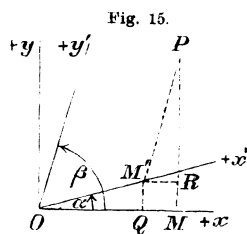
Aufg. 4. Liegen die Punkte  $(1, 1)$ ;  $(-2, 6)$ ;  $(3, -2)$  auf jener Geraden?

Aufg. 5. In welchen Punkten trifft jene Gerade die Achsen und die beiden Winkelhalbierenden derselben?

#### § 15. Übergang von einem rechtwinkligen Achsensysteme zu einem schiefwinkligen.

Durch den Anfangspunkt  $O$  eines rechtwinkligen Koordinatensystems seien zwei Strahlen  $Ox'$  und  $Oy'$  gezogen, welche wir als die positiven Richtungen eines schiefwinkligen Koordinatensystems auffassen wollen.  $Ox'$  und  $Oy'$  mögen mit der positiven Richtung der  $x$ -Achse die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  bilden, worunter, wie in § 7 und § 14, genauer diejenigen Winkel verstanden werden sollen, um welche sich die positive  $x$ -Achse im positiven Sinne drehen muß, um resp. mit den Halbstrahlen  $Ox'$  und  $Oy'$  zusammenzufallen.

Die Koordinaten eines beliebigen Punktes  $P$  seien in Bezug auf das rechtwinklige System  $OM = x$ ,  $MP = y$ , in Bezug auf das schiefwinklige System  $OM' = x'$ ,  $M'P = y'$ . Man soll den Zusammenhang zwischen den rechtwinkligen und den schiefwinkligen Koordinaten von  $P$  angeben. Aus der Figur folgt:



$$x = OM = OQ + M'R,$$

$$y = MP = QM' + RP$$

Die rechtwinkligen Dreiecke  $OQM'$ , mit dem Winkel  $\alpha$  bei  $O$ , und  $M'RP$ , mit dem Winkel  $\beta$  bei  $M'$ , lassen aber erkennen, daß:

$$\begin{aligned} OQ &= x' \cos \alpha, & QM' &= x' \sin \alpha, \\ M'R &= y' \cos \beta, & RP &= y' \sin \beta \end{aligned}$$

ist. Es ergeben sich daher die Transformationsformeln:

$$(1) \quad \begin{aligned} x &= x' \cos \alpha + y' \cos \beta, \\ y &= x' \sin \alpha + y' \sin \beta. \end{aligned}$$

Für  $\beta = 90^\circ + \alpha$  ist das System  $Ox', Oy'$  ebenfalls ein rechtwinkliges, und man erhält dann:

$$(2) \quad \begin{aligned} x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{aligned}$$

Aufg. 1. In einem rechtwinkligen Achsensysteme mögen die Koordinaten eines Punktes der Relation  $x^2 + y^2 = r^2$  genügen. In welche andere Relation verwandelt sich diese, wenn man als neue Achsen  $Ox'$  und  $Oy'$  die Winkelhalbierenden der alten Achsen wählt? (Da  $\alpha = 45^\circ$ , so hat man einfach:

$$x = \frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}$$

zu setzen.)

Aufg. 2. In einem rechtwinkligen Systeme mögen die Koordinaten eines Punktes der Relation  $x^2 - y^2 = a^2$  genügen. In welche andere Relation verwandelt sich diese, wenn man, wie bei der vorhergehenden Aufgabe, wieder die Winkelhalbierenden als neue Achsen wählt?

Aufg. 3. In einem rechtwinkligen Systeme mögen die Koordinaten eines Punktes der Relation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  genügen. Man wähle ein neues schiefwinkliges Achsensystem, dessen Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  durch die Relation:

$$\frac{\cos \alpha \cos \beta}{a^2} + \frac{\sin \alpha \sin \beta}{b^2} = 0$$

mit einander verbunden sind. Zeige, daß die zwischen  $x$  und  $y$  bestehende Gleichung in  $\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} = 1$  übergeht, insofern zur Abkürzung  $\frac{\cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{b^2} = \frac{1}{a'^2}$ ,  $\frac{\cos^2 \beta}{a^2} + \frac{\sin^2 \beta}{b^2} = \frac{1}{b'^2}$  gesetzt wird.

## Zweites Kapitel.

## Die gerade Linie.

§ 16. Definition der Gleichung einer Geraden. Die Gerade sei bestimmt durch zwei Punkte.

Wir sahen in § 12, daß, wenn in einem rechtwinkligen Koordinatensysteme eine Gerade durch zwei Punkte  $P_1$  und  $P_2$  gegeben ist, allemal eine Gleichung, nämlich:

$$(1) \quad x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2) + x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0,$$

existiert, welche befriedigt wird von den Koordinaten  $x, y$  eines jeden Punktes  $P$  der Geraden, und nur von diesen. Die geometrische Bedeutung dieses Satzes ist dabei die folgende: Die linke Seite der Gleichung stellt den doppelten Flächeninhalt des Dreiecks  $P_1 P_2 P$  dar und wird daher allemal, aber auch nur dann, verschwinden, wenn der Punkt  $P$  auf der Geraden  $P_1 P_2$  liegt. Sonst hat die linke Seite der Gleichung immer einen von Null verschiedenen Wert und zwar einen positiven für alle Punkte auf der einen, einen negativen für alle Punkte auf der andern Seite der Geraden  $P_1 P_2$ .

Da bei schiefwinkligen Koordinaten in der Formel für den Flächeninhalt des Dreiecks nur der Faktor  $\sin w$  hinzutritt, so gelten alle auf die Gleichung (1) bezüglichen Bemerkungen auch für schiefwinklige Systeme.

Durch die Gleichung (1) werden also (bei jedem beliebigen Koordinatensysteme) alle Punkte der Geraden  $P_1 P_2$  scharf unterschieden von allen andern Punkten der Ebene; wir nennen sie daher die Gleichung der Geraden, indem wir definieren:

Unter der Gleichung einer Geraden versteht man eine Gleichung zwischen zwei Unbekannten  $x$  und  $y$ , welche erfüllt wird von den Koordinaten eines jeden Punktes der Geraden, und nur von diesen.

Da jede Gerade durch zwei ihrer Punkte bestimmt werden kann, so hat also jede Gerade eine Gleichung. Es ist damit aber noch nicht gesagt, daß jede Gerade nur eine Gleichung besitze. In der That könnten wir ja die

Gerade ebenso gut durch zwei andere auf ihr gelegene Punkte  $P'$  und  $P''$  mit den Koordinaten  $x', y'$  und  $x'', y''$  bestimmen und erhielten als Gleichung derselben Geraden die Gleichung:

$$x(y' - y'') - y(x' - x'') + x'y'' - x''y' = 0,$$

die von (1) verschieden ist. Vorläufig werden wir daher einer jeden Geraden unzählig viele Gleichungen zusprechen müssen. Wir kommen darauf noch zurück.

Man kann die Gleichung (1) der Geraden  $P_1P_2$  auch ganz direkt ableiten. Aus der Figur des § 9 lesen wir nämlich unmittelbar für jeden Punkt  $P$  der Geraden  $P_1P_2$  und nur für einen solchen die Proportion ab:

$$QP : P_1Q = SP_2 : P_1S,$$

d. h.:

$$(2) \quad \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ oder } y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1),$$

woraus durch leichte Reduktion die Gleichung (1) hervorgeht.

Aufg. 1. Wie heißt die Gleichung der durch  $(2, -3)$ ;  $(-4, 1)$  gehenden Geraden? Liegt der Punkt  $(1, 4)$ , oder etwa der Anfangspunkt  $O$ , auf der Geraden?

Aufg. 2. Wenn  $P_2$  mit  $O$  zusammenfällt, so heißt die Gleichung der Geraden  $OP_1$ :  $xy_1 - yx_1 = 0$ , oder  $\frac{x}{y} = \frac{x_1}{y_1}$ . Weise dies direkt nach an Hand einer Figur. (§ 5, Aufg. 5.)

Aufg. 3. Durch passende Wahl von  $P_1$  findet man aus Aufg. 2, daß die Gleichungen der  $x$ -Achse, der  $y$ -Achse und der beiden Winkelhalbierenden resp. sind:

$$y = 0, \quad x = 0, \quad x - y = 0, \quad x + y = 0,$$

Beweise dies direkt.

Aufg. 4. Ist  $x_1 = x_2 = a$ , während  $y_1$  und  $y_2$  von einander verschieden sind, so heißt die Gleichung von  $P_1P_2$ :  $x = a$ . Ist ebenso  $y_1 = y_2 = b$ ,  $x_1 \neq x_2$ , so erhält man  $y = b$ . Zeige dies direkt.

Aufg. 5. Ein Dreieck ist gegeben durch  $(2, 3)$ ;  $(-4, 1)$ ;  $(2, -3)$ ; wie heißen die Gleichungen der drei Seiten?

Aufg. 6. Ein Dreieck ist gegeben durch die drei Punkte  $(x_1, y_1)$ ;  $(x_2, y_2)$ ;  $(x_3, y_3)$ . Beweise, daß die Gleichungen der drei Mittellinien lauten:



$$\begin{aligned} x(2y_1 - y_2 - y_3) - y(2x_1 - x_2 - x_3) + x_1y_2 - x_2y_1 + x_1y_3 - x_3y_1 &= 0, \\ x(2y_2 - y_3 - y_1) - y(2x_2 - x_3 - x_1) + x_2y_3 - x_3y_2 + x_2y_1 - x_1y_2 &= 0, \\ x(2y_3 - y_1 - y_2) - y(2x_3 - x_1 - x_2) + x_3y_1 - x_1y_3 + x_3y_2 - x_2y_3 &= 0. \end{aligned}$$

Beachte den Umstand, daß durch Addition der drei Gleichungen die linke Seite identisch verschwindet. Beachte ferner, daß die beiden letzten Gleichungen aus der ersten durch cyklische Vertauschung der Indices hervorgehen (§ 11).

Aufg. 7. Finde für das Dreieck von Aufg. 5 die Gleichungen der Mittellinien.

Aufg. 8. Geht die Gerade (3, 4); (−2, −5) durch den Anfangspunkt? Liegen die Punkte (1, 5) und (−6, −2) auf derselben Seite der Geraden?

§ 17. Fortsetzung. Die Gerade sei bestimmt durch ihren Abstand vom Anfangspunkte und den Winkel, den dieser mit der  $x$ -Achse bildet.

Da man ein und dieselbe Gerade auf die verschiedensten Arten bestimmen kann, so wird man auch die verschiedensten Gleichungen für dieselbe Gerade erwarten. Sei z. B. in einem beliebigen Koordinatensysteme eine Gerade, wie in § 14, durch ihren Abstand  $\delta$  vom Anfangspunkte und den Winkel  $\alpha$  bestimmt, den  $\delta$  mit der positiven Richtung der  $x$ -Achse einschließt. Dann war der Abstand  $d$  eines beliebigen Punktes  $(x, y)$  von der Geraden  $(\alpha, \delta)$  gegeben durch:

$$d = -(x \cos \alpha + y \cos \beta - \delta),$$

insofern  $\beta = w - \alpha$  den Winkel bedeutet, den  $\delta$  mit der positiven  $y$ -Achse einschließt. Dieser Ausdruck für  $d$  ist positiv für alle Punkte, die auf derselben Seite der Geraden liegen, wie der Anfangspunkt, negativ für alle Punkte auf der entgegengesetzten Seite und verschwindet seiner geometrischen Bedeutung entsprechend allemal, aber auch nur dann, wenn der Punkt  $(x, y)$  auf der Geraden  $(\alpha, \delta)$  liegt. Die Gleichung:

$$(1) \quad x \cos \alpha + y \cos \beta - \delta = 0$$

ist daher als die Gleichung der Geraden  $(\alpha, \delta)$  zu bezeichnen:

Bedeutung  $x, y$  die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Geraden, so wird die Gleichung erfüllt; bedeuten  $x, y$

dagegen die Koordinaten eines Punktes, der nicht auf der Geraden liegt, so ist die linke Seite nicht gleich Null, sondern bedeutet den mit dem entgegengesetzten Zeichen versehenen Abstand des Punktes  $(x, y)$  von der Geraden  $(\alpha, \delta)$ .

Für rechtwinklige Koordinaten lautet die Gleichung der Geraden  $(\alpha, \delta)$ :

$$(2) \quad x \cos \alpha + y \sin \alpha - \delta = 0.$$

Aufg. 1. In einem rechtwinkligen Systeme sei eine Gerade durch  $\delta = 7$ ,  $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ ,  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$  gegeben. Wie heisst ihre Gleichung? Liegt der Punkt  $(-1, 8)$  auf der Geraden?

Aufg. 2. In welchen Punkten trifft die vorhergehende Gerade die Achsen und die Winkelhalbierenden derselben?

§ 18. Fortsetzung. Die Gerade sei gegeben durch die Achsenabschnitte.

Bezeichnet man die Abschnitte  $OA$  und  $OB$ , welche eine Gerade mit den beliebig gewählten Koordinatenachsen bildet, mit  $a$  und  $b$  und haben  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$  die frühere Bedeutung, so lehrt die Figur unmittelbar, dafs:

$$\cos \alpha = \frac{\delta}{a}, \quad \cos \beta = \frac{\delta}{b}$$

ist. Führt man diese Werte in die Gleichung der Geraden:

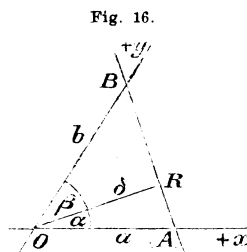
$$(1) \quad x \cos \alpha + y \cos \beta - \delta = 0$$

ein und dividiert mit  $\delta$ , so kommt:

$$(2) \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0.$$

Da die linke Seite von (2) sich von der linken Seite von (1) nur durch den von Null verschiedenen Faktor  $\delta$  unterscheidet, so genügt jedes Wertepaar, welches der Gleichung (1) genügt, auch der Gleichung (2), und umgekehrt. Die Gleichung (2) ist daher als die Gleichung der durch ihre Achsenabschnitte  $a$  und  $b$  bestimmten Geraden aufzufassen.

Aufg. 1. Welche Form nimmt die Gleichung der Geraden an, wenn einer der Achsenabschnitte  $a$  oder  $b$  unendlich groß wird, d. h. wenn die Gerade einer der Achsen parallel ist?



Aufg. 2. Wie heißen die Gleichungen der vier Geraden mit den Achsenabschnitten  $a, a$ ;  $-a, a$ ;  $-a, -a$ ;  $a, -a$ ?

Aufg. 3. Wähle auf der Geraden  $AB$  einen beliebigen Punkt  $P$  mit der Abscisse  $OM = x$ . Leite die Gleichung:

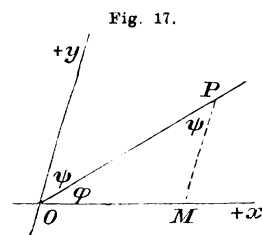
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

direkt aus der Proportion  $OA : OB = MA : MP$  ab.

Aufg. 4. Wie heißt die Gleichung der Geraden mit den Achsenabschnitten  $-7$  und  $3$ ?

§ 19. Fortsetzung. Die Gerade sei gegeben durch einen Punkt und den Winkel, den sie mit der positiven Richtung der  $x$ -Achse bildet. Richtungskoeffizient.

Wir betrachten zunächst den Spezialfall, daß der gegebene



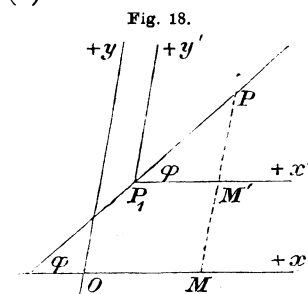
Punkt der Anfangspunkt sei. Die Gerade bilde mit der positiven Richtung der  $x$ -Achse den Winkel  $\varphi$  (§ 8) und demnach mit der positiven Richtung der  $y$ -Achse den Winkel  $w - \varphi = \psi$ . Aus der Figur folgt dann für jeden Punkt  $P$  der Geraden, aber auch nur für einen solchen, die Gleichung:

$$\frac{MP}{OM} = \frac{y}{x} = \frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{\sin \varphi}{\sin (w - \varphi)}.$$

Setzen wir  $\frac{\sin \varphi}{\sin (w - \varphi)} = \mu$ , so ist:

(1)

$$y = \mu x$$



die Gleichung der durch  $O$  und den Winkel  $\varphi$  bestimmten Geraden.

Um nun die Gleichung der durch einen beliebigen Punkt  $P_1$  gehenden Geraden, welche mit der positiven Richtung der  $x$ -Achse den Winkel  $\varphi$  einschließt, zu finden, legen wir durch  $P_1$ , mit den Koordinaten  $x_1, y_1$ , ein neues Koordinatensystem parallel und gleichgerichtet mit dem alten.

Ein beliebiger Punkt  $P$  der gegebenen Geraden, dessen alte Koordinaten  $x, y$  sind, hat dann die neuen Koordinaten  $x' = x - x_1, y' = y - y_1$ , und für diese besteht, da  $w$  und  $\varphi$  in dem neuen Systeme dieselben sind wie in dem alten, die Gleichung  $y' = \mu x'$ . Daraus folgt aber, indem man zu dem alten Systeme zurückkehrt:

$$(2) \quad y - y_1 = \mu(x - x_1).$$

Dieses ist daher die gesuchte Gleichung der durch  $P_1$  und  $\varphi$ , resp.  $\mu$  definierten Geraden.

Liegt insbesondere  $P_1$  auf der Ordinatenachse, so ist  $x_1 = 0$  und  $y_1$  gleich dem Abschnitte, den die Gerade mit der Ordinatenachse bestimmt. Bezeichnet man denselben, wie früher, mit  $b$ , so ist:

$$(3) \quad y = \mu x + b$$

die Gleichung der durch ihren Abschnitt auf der Ordinatenachse und ihre Richtung bestimmten Geraden.

Man bezeichnet den in den drei Gleichungen (1), (2) und (3) als Faktor von  $x$  auftretenden Koeffizienten, nämlich:

$$(4) \quad \mu = \frac{\sin \varphi}{\sin(w - \varphi)},$$

als den Richtungskoeffizienten der betreffenden Geraden. In demselben Koordinatensysteme haben dann parallele Geraden gleiche Richtungskoeffizienten.

Für eine durch zwei Punkte  $P_1$  und  $P_2$  bestimmte Gerade (man denke in Fig. 18  $P$  durch  $P_2$  ersetzt) erhält man aus (4) den Richtungskoeffizienten unmittelbar in der Form:

$$(5) \quad \mu = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

d. h.: der Richtungskoeffizient einer durch zwei Punkte gegebenen Geraden ist gleich dem Quotienten aus der Ordinatendifferenz und der Abscissendifferenz der beiden Punkte.

Aus den Gleichungen (2) und (5) findet man dann wieder die in § 16, Gl. (2) abgeleitete Gleichungsform:

$$(6) \quad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1).$$

Ist das Koordinatensystem ein rechtwinkliges, so folgt aus  $\sin(w - \varphi) = \sin(90^\circ - \varphi) = \cos \varphi$ , dafs:

$$(7) \quad \mu = \operatorname{tg} \varphi$$

ist, d. h.:

Im rechtwinkligen Koordinatensysteme ist der Richtungskoeffizient einer Geraden gleich der Tangente ihres Neigungswinkels.

Aufg. 1. Beweise, dafs nicht nur jede Gerade einen ganz bestimmten Richtungskoeffizienten besitzt, sondern dafs auch umgekehrt jede Zahl als Richtungskoeffizient einer ganz bestimmten, durch  $P_1$  gehenden Geraden aufgefaßt werden kann. Durch Auflösen der Gleichung (4) erhält man nämlich:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\mu \sin w}{1 + \mu \cos w},$$

also zu jedem  $\mu$  einen eindeutig bestimmten Wert von  $\operatorname{tg} \varphi$ . Geraden mit demselben Richtungskoeffizienten müssen daher parallel sein oder zusammenfallen.

Aufg. 2. Zeige, dafs in jedem beliebigen Koordinatensysteme den Werten  $\mu = 0, \infty, +1, -1$  Parallelen zu den beiden Achsen und den Winkelhalbierenden derselben entsprechen.

Aufg. 3. Bestimme in einem beliebigen Koordinatensysteme die Gleichungen der durch  $(2, -5)$  gehenden Geraden, welche a) den Achsen, b) den Winkelhalbierenden parallel sind.

Aufg. 4. Zeige, dafs der durch Gl. (5) dargestellte Wert von  $\mu$  für eine und dieselbe Gerade unabhängig ist von der Wahl der Punkte  $P_1$  und  $P_2$ .

Aufg. 5. Ein Dreieck ist durch  $(-2, -5); (3, -4); (-1, 2)$  gegeben. Bestimme die Richtungskoeffizienten der drei Seiten, sowie die Gleichungen der drei Geraden, welche durch die Ecken des Dreiecks gehen und den gegenüberliegenden Seiten desselben parallel sind.

Aufg. 6. Bestimme die Gleichungen der drei Geraden, welche durch den Anfangspunkt gehen und den Mittellinien des vorhergehenden Dreiecks parallel sind.

§ 20. Jede Gerade besitzt eine Gleichung von der Form  $Ax + By + C = 0$ , und umgekehrt, jede Gleichung dieser Form stellt eine Gerade dar.

Je nach der Bestimmungsart konnten wir für ein und dieselbe Gerade, unter Voraussetzung eines beliebigen Koordinatensystems, die folgenden Gleichungen ableiten:

$$x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2) + x_1y_2 - x_2y_1 = 0,$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1),$$

$$x \cos \alpha + y \cos \beta - \delta = 0,$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

$$y - y_1 = \mu (x - x_1),$$

$$y = \mu x + b.$$

So verschieden nun auch diese Gleichungen (deren Anzahl man noch beliebig vergrößern könnte, da sich dieselbe Gerade auf unzählig viele Arten bestimmen läßt) auf den ersten Blick erscheinen mögen, sie haben doch alle das Gemeinschaftliche, daß jede von ihnen die Größen  $x$  und  $y$  in der ersten Potenz, behaftet mit bekannten Koeffizienten, enthält und außerdem noch ein von  $x$  und  $y$  freies Glied.

Jede der Gleichungen ist also von der Form:

$$(1) \quad Ax + By + C = 0,$$

wo  $A$ ,  $B$  und  $C$  durch die Bestimmungsart der Geraden gegeben, also bekannte Größen bedeuten, während  $x$  und  $y$  keine festen Werte haben, sondern in dem Sinne veränderlich sind, daß sie die Koordinaten eines jeden Punktes der Geraden bedeuten können. Man nennt aus diesem Grunde  $x$  und  $y$  auch die laufenden Koordinaten.

Die verschiedenen Gleichungen, die wir für eine und dieselbe Gerade erhalten, unterscheiden sich also nur durch die Werte der Koeffizienten  $A$ ,  $B$ ,  $C$  von einander, die man im Gegensatze zu den Veränderlichen  $x$ ,  $y$  auch die Konstanten der betreffenden Gleichung nennt. Es drängen sich nun sofort zwei fundamentale Fragen auf:

I. Wenn jetzt durch die verschiedensten Beispiele gezeigt ist, daß jede gerade Linie eine Gleichung von der Form  $Ax + By + C = 0$  besitzt, kann dann auch umgekehrt jede Gleichung von dieser Form als die Gleichung einer Geraden aufgefaßt werden?

II. Wenn man für eine und dieselbe Gerade das eine Mal die Gleichung  $Ax + By + C = 0$ , das andere Mal  $A'x + B'y + C' = 0$  findet, welche Beziehung besteht dann zwischen  $A, B, C$  einerseits und  $A', B', C'$  andererseits?

Um die erste Frage zu beantworten, nehmen wir an, es seien in der Gleichung (1) die Koeffizienten  $A, B, C$  ganz beliebige, positive oder negative, gegebene, also bekannte Größen, die auch zum Teil gleich Null sein können. Da die Gleichung zwei Unbekannte  $x$  und  $y$  besitzt, so giebt es unzählig viele Wertepaare  $x, y$ , welche ihr genügen; denn man kann der einen der beiden Unbekannten einen ganz beliebigen Wert beilegen und erhält dann jedesmal durch Auflösen nach der andern Unbekannten für diese einen ganz bestimmten zugehörigen Wert. Wir wollen nun, indem wir ein beliebiges Koordinatensystem zu Grunde legen, jedes Wertepaar, welches der Gleichung (1) genügt, durch einen Punkt repräsentieren und haben dann zu beweisen, daß alle diese Punkte eine gerade Linie erfüllen. Zu diesem Zwecke nehmen wir zunächst an, es sei  $B = 0$ . Zu jedem  $y$  findet man dann aus  $Ax + C = 0$  immer denselben zugehörigen Wert  $x = -\frac{C}{A}$ . Die entsprechenden Punkte liegen daher alle auf der Parallelen zur  $y$ -Achse, welche auf der  $x$ -Achse das Stück  $-\frac{C}{A}$  abschneidet, und umgekehrt genügen die Koordinaten jedes Punktes dieser Parallelen der Gleichung  $Ax + C = 0$ .

Ist dagegen  $B$  von Null verschieden, so erhalten wir durch Auflösen der Gleichung (1) nach  $y$ :

$$(2) \quad y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Jedes Wertepaar  $x, y$ , welches der Gleichung (1) genügt, befriedigt auch die Gleichung (2), und umgekehrt.

Konstruiert man jetzt eine Gerade, deren Richtungskoeffizient  $\mu = -\frac{A}{B}$  ist (§ 19, Aufg. 1) und welche auf der  $y$ -Achse das Stück  $b = -\frac{C}{B}$  abschneidet, so lautet die Gleichung derselben:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Da diese mit (2) völlig identische Gleichung allemal, aber auch nur dann, erfüllt wird, wenn  $x, y$  die Koordinaten eines Punktes jener Geraden bedeuten, und da dasselbe folglich auch von Gleichung (1) gilt, so ist damit bewiesen, daß für jedes beliebige Koordinatensystem jede Gleichung von der Form  $Ax + By + C = 0$  als die Gleichung einer Geraden aufgefaßt werden kann. (Zur Abkürzung werden wir im Folgenden häufig eine Gerade durch ihre Gleichung benennen und von der Geraden  $Ax + By + C = 0$  reden.)

Zur Beantwortung der zweiten Frage nehmen wir an, die beiden Gleichungen  $Ax + By + C = 0$  und  $A'x + B'y + C' = 0$  stellten dieselbe gerade Linie dar. Wir unterscheiden zwei Fälle: 1)  $B = 0$ . Dann stellt die erste Gleichung eine Parallele zur Ordinatenachse dar, und es muß daher auch, da die zweite Gleichung dieselbe Parallele darstellen soll,  $B' = 0$  sein, weil man sonst nicht für jedes  $y$  dasselbe  $x$  erhalten würde. Dann folgt aber  $-\frac{C}{A} = -\frac{C'}{A'}$  oder  $\frac{A'}{A} = \frac{C'}{C}$ .

Bezeichnet man den gemeinschaftlichen Wert dieser beiden Brüche mit  $\lambda$ , so folgt:

$$A' = \lambda A, \quad C' = \lambda C.$$

2)  $B$  und folglich auch  $B'$  seien von Null verschieden. Zu jedem  $x$  muß dann aus beiden Gleichungen dasselbe  $y$  sich ergeben, d. h. es muß für jedes  $x$  sein:

$$-\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} = -\frac{A'}{B'}x - \frac{C'}{B'}.$$

Für  $x = 0$  folgt hieraus  $\frac{C}{B} = \frac{C'}{B'}$ , daher muß auch für jedes  $x$  die Gleichung  $\frac{A}{B}x = \frac{A'}{B'}x$  bestehen, d. h. es muß  $\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'}$



sein. Hieraus und aus  $\frac{C}{B} = \frac{C'}{B'}$  folgt aber  $\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C}$ . Bezeichnet man den gemeinschaftlichen Wert dieser Brüche wieder mit  $\lambda$ , so ergibt sich:

$$A' = \lambda A, \quad B' = \lambda B, \quad C' = \lambda C.$$

In allen Fällen finden wir also:

Wenn die beiden Gleichungen  $Ax + By + C = 0$  und  $A'x + B'y + C' = 0$  dieselbe Gerade darstellen sollen, so muß die eine aus der andern durch Multiplikation mit einem konstanten, von Null verschiedenen Faktor hervorgehen.

Umgekehrt ist klar, daß, wenn man die Gleichung einer Geraden mit einem konstanten, von Null verschiedenen Faktor multipliziert, die neue Gleichung dieselbe Gerade darstellt wie die alte.

Aufg. 1. Liegen die Punkte  $(2, -3)$ ;  $(-1, -4)$ ;  $(-2, 7)$ ;  $(12, 2)$  auf der Geraden  $x - 5y = 2$ ?

Aufg. 2. Welche von den Geraden  $8x - 5y + 1 = 0$ ,  $y = -7x + 2$ ,  $3x - 5y - 6 = 0$  geht durch den Punkt  $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{10})$ ?

Aufg. 3. Welche von den Geraden  $5x + 3y + 1 = 0$ ,  $2x + 3y = 0$ ,  $4x - 5y + 2 = 0$  geht durch den Anfangspunkt?

Aufg. 4. Wie heißt die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß der Punkt  $(x_1, y_1)$  auf der Geraden  $Ax + By + C = 0$  liegt?

Aufg. 5. Wenn  $(x_1, y_1)$  und  $(x_2, y_2)$  auf der Geraden  $Ax + By + C = 0$  liegen, so liegt auch der Punkt  $(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda})$  für jedes beliebige  $\lambda$  auf der Geraden. Beweise dies zunächst durch wirkliches Ausrechnen und gib dann den inneren Grund an.

Aufg. 6. Transformiere die Gleichung der Verbindungsline  $P_1P_2$  auf ein neues System, dessen Anfangspunkt die Mitte von  $P_1P_2$  ist und dessen Achsen den alten parallel sind.

Aufg. 7. In einem rechtwinkligen Systeme seien die Geraden  $5x - 2y = 7$  und  $x + y = 1$  gegeben. Wie lauten die Gleichungen dieser Geraden in dem schiefwinkligen Systeme

dessen Anfangspunkt der ursprüngliche ist und dessen Achsen durch  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 45^\circ$  (§ 15) bestimmt sind?

§ 21. Ableitung der speziellen Formen der Gleichung einer Geraden aus der allgemeinen Form  $Ax + By + C = 0$ .

Aus der am Ende des vorigen Paragraphen gemachten Bemerkung folgt, daß die allgemeine Gleichung:

$$Ax + By + C = 0$$

nur scheinbar drei willkürliche Konstanten enthält; denn da die Bedeutung jener Gleichung durch Multiplikation mit einer beliebigen Konstanten, etwa  $\frac{1}{C}$ , nicht geändert wird, so ist die durch  $Ax + By + C = 0$ , oder  $\frac{A}{C}x + \frac{B}{C}y + 1 = 0$  dargestellte Gerade schon vollständig bestimmt, wenn man nur die Verhältnisse  $\frac{A}{C}$  und  $\frac{B}{C}$  kennt. Die Gleichung einer Geraden enthält also im Grunde genommen nur zwei willkürliche Konstanten, die allemal so gewählt werden können, daß die Gerade zwei Bedingungen erfüllt. Die speziellen Formen der Gleichung einer Geraden, wie z. B.:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

$$x = \mu x + b,$$

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - \delta = 0$$

etc. bringen dies auch deutlich zum Ausdrucke.

Es muß nun nach dem Vorhergehenden möglich sein, jede dieser speziellen Formen durch einfache Multiplikation mit einem konstanten Faktor aus der allgemeinen Form abzuleiten.

Bezeichnet man z. B. die Achsenabschnitte der Geraden  $Ax + By + C = 0$  mit  $a$  und  $b$ , so wird dieselbe Gerade auch durch die Gleichung  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$  dargestellt, und man erkennt, daß die erste Gleichung mit der zweiten durch Multiplikation mit  $-\frac{1}{C}$  in Übereinstimmung gebracht werden kann. Vergleicht man aber jetzt  $-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y - 1 = 0$  mit  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$ , so findet man:

$$(1) \quad a = -\frac{C}{A}, \quad b = -\frac{C}{B}$$

als die Achsenabschnitte der Geraden  $Ax + By + C = 0$ .

Natürlich ergibt sich das gleiche Resultat, wenn man bedenkt, daß die Schnittpunkte der Geraden  $Ax + By + C = 0$  mit den Achsen durch die Koordinaten  $a, 0$ , resp.  $0, b$  ausgezeichnet sind. Man setze daher das eine Mal  $y = 0$  und löse nach  $x$  auf, wodurch sich  $x = a = -\frac{C}{A}$  ergibt, das andere Mal  $x = 0$  und löse nach  $y$  auf, was zu  $y = b = -\frac{C}{B}$  führt. Man beachte, daß die Gerade  $Ax + By + C = 0$  allemal, aber auch nur dann, durch den Anfangspunkt geht, wenn das absolute Glied  $C = 0$  ist.

Will man ferner den Richtungskoeffizienten  $\mu$  und den Achsenabschnitt  $b$  der Geraden  $Ax + By + C = 0$  bestimmen, so hat man (§ 20) nur durch  $B$  zu dividieren, d. h. nach  $y$  aufzulösen. Die Gleichung:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

zeigt dann, daß:

$$(2) \quad \mu = -\frac{A}{B} \quad \text{und} \quad b = -\frac{C}{B}$$

ist. Der Richtungskoeffizient  $\mu$  ist also allein von den Koeffizienten  $A$  und  $B$  von  $x$  und  $y$  abhängig, nicht aber von dem absoluten Gliede. Daraus folgt, daß Gleichungen, die sich nur durch das absolute Glied von einander unterscheiden, wie etwa  $2x - 5y + 4 = 0$  und  $2x - 5y - 3 = 0$  parallele Geraden darstellen (§ 19, Aufg. 1).

Aufg. 1. Bestimme die Achsenabschnitte und die Richtungskoeffizienten der Geraden  $2x + 7y + 5 = 0$ ,  $3x + 4y = 6$ ,  $-5x + 2y = 7$ ,  $5x - 8y - 2 = 0$ .

Aufg. 2. Bestimme die Achsenabschnitte der beiden Geraden  $5x - 8y + 9 = 0$  und  $56y - 35x = 63$  und diskutiere das Resultat.

Aufg. 3. Bestimme die Richtungskoeffizienten der Geraden  $5x - 7y = 0$ ,  $3x + 8 = 0$ ,  $2y - 7 = 0$ .

Aufg. 4. Bestimme  $\mu$  und  $b$  so, daß die Gerade  $y = \mu x + b$  durch die beiden Punkte  $(x_1, y_1)$ ;  $(x_2, y_2)$  hindurchgeht, und

konstatiere die Übereinstimmung des Resultats mit § 19, Gl. (6).

Aufg. 5. Bestimme den Richtungskoeffizienten der Geraden  $x \cos \alpha + y \sin \alpha - \delta = 0$  und leite das Resultat auch geometrisch ab.

Aufg. 6. Welches sind die Achsenabschnitte der Geraden:

$$x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2) + x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0?$$

Aufg. 7. Beweise, daß zwischen Richtungskoeffizient und Achsenabschnitten die Gleichung  $\mu = -\frac{b}{a}$  besteht. Erläutere dies an der Figur.

## § 22. Fortsetzung. Die Normalform.

Unter Voraussetzung eines rechtwinkligen Koordinatensystems soll die Gleichung  $Ax + By + C = 0$  einer Geraden auf die Form  $x \cos \alpha + y \sin \alpha - \delta = 0$  gebracht werden, d. h. man soll den Abstand  $\delta$  des Anfangspunktes von der Geraden  $Ax + By + C = 0$  und den Winkel  $\alpha$  bestimmen, welchen dieser Abstand mit der positiven Richtung der  $x$ -Achse bildet.

Nach § 20 muß es einen Faktor  $\lambda$  geben, sodaß:

$$\lambda A = \cos \alpha, \quad \lambda B = \sin \alpha, \quad \lambda C = -\delta \text{ ist.}$$

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt durch Quadrieren und Addieren  $\lambda^2(A^2 + B^2) = 1$  oder  $\lambda = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ . Nach der dritten Gleichung soll  $\lambda C$  negativ sein, also hat man überdies der Quadratwurzel das entgegengesetzte Zeichen von  $C$  zu geben. Dann ist also jetzt:

$$(1) \quad \cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \delta = -\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Unter allen Formen, in denen sich die Gleichung einer Geraden darstellen läßt, spielt die Form  $x \cos \alpha + y \sin \alpha - \delta = 0$  wegen der geometrischen Bedeutung der linken Seite eine besondere Rolle. Wir erinnern uns, daß diese linke Seite allemal den, mit dem entgegengesetzten Zeichen genommenen, Abstand des Punktes  $(x, y)$  von der Geraden  $(\alpha, \delta)$  darstellt; diese Eigenschaft hatte uns wesentlich zur Einführung des

Begriffes der Gleichung einer Geraden gedient. Man hat daher diese spezielle Gleichungsform  $x \cos \alpha + y \sin \alpha - \delta = 0$  durch einen besonderen Namen ausgezeichnet und sie die Normalform genannt. Will man die Gleichung  $Ax + By + C = 0$  einer Geraden auf die Normalform bringen, so hat man sie nach dem Obigen durch  $\sqrt{A^2 + B^2}$  zu dividieren, wo der Quadratwurzel das entgegengesetzte Zeichen von  $C$  zu geben ist. In der Gleichung:

$$(2) \quad \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0,$$

welche nunmehr mit  $x \cos \alpha + y \sin \alpha - \delta = 0$  völlig identisch ist, stellt dann die linke Seite ebenfalls den, mit dem entgegengesetzten Zeichen genommenen, Abstand  $d$  des Punktes  $(x, y)$  von der Geraden  $Ax + By + C = 0$  dar, d. h. es ist:

$$Ax + By + C = -d\sqrt{A^2 + B^2}.$$

Dadurch gewinnen wir aber eine neue Einsicht in die Bedeutung der allgemeinen Gleichung  $Ax + By + C = 0$  einer Geraden. Es stellt nämlich der Ausdruck auf der linken Seite, also  $Ax + By + C$ , den mit  $-\sqrt{A^2 + B^2}$  multiplizierten Abstand des Punktes  $(x, y)$  von der durch die Achsenabschnitte  $-\frac{C}{A}$  und  $-\frac{C}{B}$  oder (für  $C = 0$ ) durch den Richtungskoeffizienten  $-\frac{A}{B}$  bestimmten Geraden dar. Dieser Ausdruck  $Ax + By + C$  ist daher positiv für alle Punkte auf der einen Seite der Geraden, negativ für alle Punkte auf der andern Seite und verschwindet allemal, aber auch nur dann, wenn der Punkt  $(x, y)$  auf der Geraden selbst liegt. In dieser Weise tritt die eigentliche Bedeutung der Gleichung  $Ax + By + C = 0$  einer Geraden scharf hervor. Zugleich ist durch das Vorhergehende die folgende Aufgabe erledigt:

Es soll der Abstand eines Punktes  $(x_0, y_0)$  von der Geraden  $Ax + By + C = 0$  nach Größe und Vorzeichen angegeben werden.

Der gesuchte Abstand ist nämlich:

$$(3) \quad d = -\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

wo nach dem Obigen der Quadratwurzel das entgegengesetzte Zeichen von  $C$  zu geben ist.

Aufg. 1. Bringe folgende Gleichungen auf die Normalform:

$$3x - 4y + 7 = 0, \quad 5x + 12y - 1 = 0, \quad 8x + 3y + 1 = 0$$

und bestimme daraus die Lage der Geraden.

Aufg. 2. Bestimme für die Geraden  $2x + 7y = 1$ ,  $5y - 3x = 4$ ,  $3 + 4x + 3y = 0$ ,  $2x - 5y - 1 = 0$  jedesmal den Quadranten, in dem sich das entsprechende  $\alpha$  befindet.

Aufg. 3. Wie weit ist die Gerade  $12x - 5y + 4 = 0$  vom Anfangspunkte entfernt?

Aufg. 4. Bestimme die Abstände der Punkte  $(-1, 5)$ ;  $(2, -7)$ ;  $(0, 1)$ ;  $(1, 0)$ ;  $(0, 0)$ ;  $(0, \frac{5}{16})$  von der Geraden:

$$63x - 16y + 5 = 0$$

und diskutiere die Vorzeichen.

Aufg. 5. Welches ist die geometrische Bedeutung der Ausdrücke:

$$16x_0 + 63y_0 - 2, \quad 3x_0 + 8y_0 - 5, \quad x_0 - y_0, \quad x_0 + y_0,$$

wenn  $x_0, y_0$  die Koordinaten eines gegebenen Punktes sind?

Aufg. 6. Bestimme den doppelten Flächeninhalt des Dreiecks  $P_1 P_2 P_3$ , welches durch die Koordinaten seiner Ecken gegeben ist, durch Multiplikation der Seite  $P_1 P_2$  mit dem von  $P_3$  auf sie gefällten Lote. Konstatiere die Übereinstimmung des Resultats mit § 11.

Aufg. 7. Drücke die Bedingung dafür aus, daß der Punkt  $(x_0, y_0)$  von den beiden Geraden  $Ax + By + C = 0$  und  $A'x + B'y + C' = 0$  gleiche Abstände hat. Wo liegen alle diese Punkte, und wie kann man demnach das Resultat deuten?

### § 23. Die Koordinaten des Durchschnittspunktes zweier Geraden aus den Gleichungen derselben zu bestimmen.

Die beiden Geraden seien durch die Gleichungen:

$$(1) \quad A_1 x + B_1 y + C_1 = 0,$$

$$(2) \quad A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

gegeben.

Die Koordinaten  $x, y$  des Schnittpunktes  $S$  müssen dann den beiden Gleichungen gleichzeitig genügen; man findet sie

daher, indem man (1) und (2) als Gleichungen mit den beiden Unbekannten  $x$  und  $y$  betrachtet und nach diesen auflöst.

Man erhält:

$$(3) \quad x = \frac{B_1 C_2 - B_2 C_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}, \quad y = \frac{C_1 A_2 - C_2 A_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}.$$

Diese Formeln liefern für die Koordinaten des Schnittpunktes ganz bestimmte endliche Werte, vorausgesetzt, daß:

$$A_1 B_2 - A_2 B_1$$

von Null verschieden ist. Hat man aber:

$$(4) \quad A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0,$$

während die Zähler von  $x$  und  $y$  nicht verschwinden, so werden  $x$  und  $y$  unendlich groß, der Schnittpunkt  $S$  liegt im Unendlichen, d. h. die beiden Geraden sind parallel. In der That folgt aus  $A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0$ , daß  $-\frac{A_1}{B_1} = -\frac{A_2}{B_2}$ , d. h. daß die Richtungskoeffizienten gleich sind.

Aufg. 1. Die Seiten eines Dreiecks haben die Gleichungen:

$$x - 5y = 1, \quad 2x + 3y = 4, \quad 5x - 3y + 2 = 0.$$

Bestimme die Koordinaten der Ecken.

Aufg. 2. Diskutiere die Formeln für die Koordinaten des Schnittpunktes, falls von den Ausdrücken:

$$A_1 B_2 - A_2 B_1, \quad B_1 C_2 - B_2 C_1, \quad C_1 A_2 - C_2 A_1$$

einer, zwei oder alle drei verschwinden. Zeige, daß, wenn zwei der Ausdrücke verschwinden, der dritte im allgemeinen auch verschwindet und daß dann die beiden Geraden zusammenfallen.

Aufg. 3. Diskutiere dieselben Formeln für den Fall, daß von den Koeffizienten  $A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2$  einer oder mehrere, z. B.  $A_1$  und  $A_2$ , oder  $A_1$  und  $B_2$ , verschwinden.

Aufg. 4. Geht die Gerade  $x - 3y - 7 = 0$  durch den Schnittpunkt von  $2y - 3x = 8$  und  $4x - 7y = 1$ ?

Aufg. 5. Bestimme den Schnittpunkt von:

$$6x - 7y + 5 = 0, \quad 56y = 40 + 48x$$

und diskutiere das Resultat.

Aufg. 6. Beweise, daß der doppelte Inhalt des durch die Geraden:

$A_1x + B_1y + C_1 = 0$ ,  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ ,  $A_3x + B_3y + C_3 = 0$   
gebildeten Dreiecks durch die Formel:

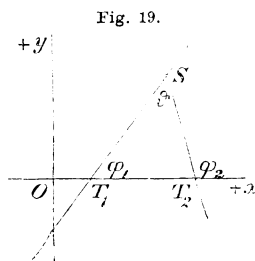
$$\frac{[A_1(B_2C_3 - B_3C_2) + A_2(B_3C_1 - B_1C_3) + A_3(B_1C_2 - B_2C_1)]^2}{(A_2B_3 - A_3B_2)(A_3B_1 - A_1B_3)(A_1B_2 - A_2B_1)}$$

gegeben wird.

Aufg. 7. Bestimme aus den Koordinaten der Ecken des Dreiecks  $P_1P_2P_3$  die Koordinaten des Schnittpunktes zweier Mittellinien (§ 9, Aufg. 3 und 4).

§ 24. Den Winkel zweier Geraden aus ihren Gleichungen zu bestimmen, unter Voraussetzung rechtwinkliger Koordinaten.

Bezeichnet man die ganz bestimmten Winkel, welche die Geraden  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  und  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$  mit der positiven Richtung der  $x$ -Achse bilden, mit  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$ , so ist einer der beiden Winkel, welche die Geraden miteinander bilden, allemal  $\varphi_2 - \varphi_1$  oder  $\varphi_1 - \varphi_2$ , je nachdem  $\varphi_2$  größer oder kleiner als  $\varphi_1$  ist, seine Tangente ist daher entweder  $\operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1)$  oder  $\operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi_2) = -\operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1)$ .



Da aber die Tangente des Nebengewinkels (wegen  $\operatorname{tg}(180^\circ - \vartheta) = -\operatorname{tg} \vartheta$ ) alsdann gleich  $\operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi_2)$  oder gleich  $\operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1)$  ist, so folgt, daß unter allen Umständen  $\operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1)$  gleich der Tangente eines der beiden Winkel ist, welche die Geraden mit einander bilden. Nun ist:

$$(1) \quad \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1}{1 + \operatorname{tg} \varphi_2 \operatorname{tg} \varphi_1}.$$

Da das Koordinatensystem ein rechtwinkliges ist, so sind  $\operatorname{tg} \varphi_1$  und  $\operatorname{tg} \varphi_2$  die Richtungskoeffizienten der beiden Geraden (§ 19, Gl. (7)), also gleich  $-\frac{A_1}{B_1}$  resp.  $-\frac{A_2}{B_2}$ . Setzt man diese Werte in  $\operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1)$  ein, so erhält man nach einfacher Reduktion:

$$(2) \quad \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}.$$



Von besonderem Interesse sind die beiden Fälle, für welche  $\operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1)$  verschwindet, resp. unendlich groß wird. Dann sind die beiden Geraden einander parallel, resp. zu einander normal; und umgekehrt, wenn dies stattfindet, muß  $\operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1)$  verschwinden, resp. unendlich groß werden. Daraus folgt:

I. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Geraden  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  und  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$  einander parallel sind, lautet:

$$A_1B_2 - A_2B_1 = 0.$$

II. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Geraden  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  und  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$  auf einander senkrecht stehen, heißt:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

Sind die beiden Geraden durch die Gleichungen  $y = \mu_1x + b_1$  und  $y = \mu_2x + b_2$  gegeben, so findet man:

$$(3) \quad \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\mu_2 - \mu_1}{1 + \mu_1\mu_2}.$$

Die Bedingungen I und II lauten dann einfacher:

$$\mu_1 = \mu_2 \text{ resp. } 1 + \mu_1\mu_2 = 0 \text{ oder } \mu_2 = -\frac{1}{\mu_1}.$$

Zu beachten ist, daß die Gleichung  $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ , resp.  $\mu_1 = \mu_2$  auch für schiefwinklige Koordinaten die Bedingung des Parallelismus ausdrückt (§ 23), während die Bedingung  $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ , resp.  $1 + \mu_1\mu_2 = 0$  den rechtwinkligen Koordinaten ausschließlich zukommt.

Mit Berücksichtigung von § 19 können wir nun sofort folgende Fundamentalaufgaben lösen:

1) Die Gleichung der Geraden zu bestimmen, welche durch den Punkt  $(x_1, y_1)$  geht und der Geraden  $y = \mu x + b$  parallel ist.

Da die Parallele ebenfalls den Richtungskoeffizienten  $\mu$  besitzt, so lautet ihre Gleichung:

$$y - y_1 = \mu(x - x_1).$$

Diese Lösung gilt für schiefwinklige wie für rechtwinklige Koordinaten.

2) Für ein rechtwinkliges Koordinatensystem die Gleichung der Geraden zu bestimmen, welche durch den Punkt  $(x_1, y_1)$  geht und auf der Geraden  $y = \mu x + b$  senkrecht steht.

Da der Richtungskoeffizient der gesuchten Normalen gleich  $-\frac{1}{\mu}$  sein muß, so lautet die Gleichung derselben:

$$y - y_1 = -\frac{1}{\mu}(x - x_1).$$

Ist die gegebene Gerade durch die Gleichung  $Ax + By + C = 0$  dargestellt (also  $\mu = -\frac{A}{B}$ ), so ergeben sich für die Parallele und die Normale die Gleichungen:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0,$$

$$B(x - x_1) - A(y - y_1) = 0,$$

von denen die erstere für beliebige, die letztere ausschließlich für rechtwinklige Koordinaten gilt. Die Gleichung der Normalen kann man auch in der Form  $\frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B}$  schreiben.

Es ist von praktischem Werte, sich zu merken, daß die Gleichung irgend einer Parallelen oder (bei rechtwinkligen Koordinaten) irgend einer Normalen der Geraden  $Ax + By + C = 0$  sich allemal in der Form:

$$Ax + By + C' = 0, \quad \text{resp.}$$

$$Bx - Ay + C'' = 0$$

darstellen läßt.  $C'$  und  $C''$  sind dann noch unbekannte Konstanten, die dadurch bestimmt werden können, daß man die Parallele, resp. die Normale noch einer weiteren Bedingung unterwirft, z. B. durch einen festen Punkt zu gehen. Oft aber ist die Bestimmung von  $C'$  und  $C''$  gar nicht gefordert, und dann hat man in den angegebenen Gleichungen sofort die fertigen Lösungen.

Bei den folgenden Aufgaben sollen rechtwinklige Koordinaten vorausgesetzt werden.

Aufg. 1. Man zeige direkt, daß für zwei auf einander senkrecht stehende Geraden  $\mu_1 = -\frac{1}{\mu_2}$  ist.

Aufg. 2. Bestimme die Winkel des Dreiecks  $(2, 5)$ ;  $(-1, 4)$ ;  $(3, 2)$ .

Aufg. 3. Bestimme die Gleichung der Geraden, welche durch den Anfangspunkt geht und zu  $2x - 7y + 11 = 0$  parallel ist.

Aufg. 4. Die Gleichungen der Seiten eines Dreiecks seien  $2x + 7y - 3 = 0$ ,  $y - 5x + 1 = 0$ ,  $3x - 4y + 2 = 0$ . Wie heißen die Gleichungen der drei Geraden, welche durch die Ecken des Dreiecks gehen und den Gegenseiten parallel sind?

Aufg. 5. Bestimme die Gleichungen der drei Höhen des Dreiecks  $(1, 2)$ ;  $(3, -4)$ ;  $(-2, -5)$  und die Koordinaten des Schnittpunktes von je zwei Höhen.

Aufg. 6. Bestimme für dasselbe Dreieck die Gleichungen der Senkrechten in den Mitten der Seiten und die Koordinaten des Schnittpunktes von je zweien derselben.

Aufg. 7. Beweise, daß die Gleichungen der drei Höhen des Dreiecks  $(x_1, y_1)$ ;  $(x_2, y_2)$ ;  $(x_3, y_3)$  lauten:

$$(x - x_1)(x_2 - x_3) + (y - y_1)(y_2 - y_3) = 0,$$

$$(x - x_2)(x_3 - x_1) + (y - y_2)(y_3 - y_1) = 0,$$

$$(x - x_3)(x_1 - x_2) + (y - y_3)(y_1 - y_2) = 0.$$

Beachte die cyklische Vertauschung sowie den Umstand, daß durch Addition der drei Gleichungen die linke Seite identisch verschwindet.

Aufg. 8. Beweise, daß die Gleichungen der drei Senkrechten, die man in den Mitten der Seiten eines Dreiecks auf denselben errichten kann, lauten:

$$x(x_2 - x_3) + y(y_2 - y_3) - \frac{1}{2}(x_2^2 - x_3^2) - \frac{1}{2}(y_2^2 - y_3^2) = 0.$$

(Die beiden andern erhält man durch cyklische Vertauschung.) Durch Addition der drei Gleichungen erhält man wieder identisch Null.

Aufg. 9. Die Gleichungen der beiden Geraden zu ermitteln, welche durch  $(3, -5)$  gehen und die Gerade:

$$7x + 2y - 4 = 0$$

unter  $45^\circ$  schneiden.

Aufg. 10. Beweise, daß bei schiefwinkligen Koordinaten zwei Geraden mit den Richtungskoeffizienten  $\mu_1$  und  $\mu_2$  zu einander normal sind, wenn  $\mu_1\mu_2 = -1 - (\mu_1 + \mu_2)\cos w$  ist, und umgekehrt (§ 19, Aufg. 1). Für  $w = 90^\circ$  erhält man dann wieder  $\mu_1\mu_2 = -1$ .

§ 25. Die Bedingung zu finden, unter welcher sich die drei Geraden  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ ,  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$  und  $A_3x + B_3y + C_3 = 0$  in einem und demselben Punkte schneiden.

Die Gleichung des Strahlenbüschels.

Damit die drei Geraden durch einen und denselben Punkt gehen, ist notwendig und hinreichend, daß die Koordinaten des Schnittpunktes der beiden ersten Geraden (§ 23) der Gleichung der dritten Geraden genügen. Man findet daher die gewünschte Bedingung in der Form:

$$A_3(B_1C_2 - B_2C_1) + B_3(C_1A_2 - C_2A_1) + C_3(A_1B_2 - A_2B_1) = 0,$$

oder anders geordnet:

$$A_1(B_2C_3 - B_3C_2) + B_1(C_2A_3 - C_3A_2) + C_1(A_2B_3 - A_3B_2) = 0.$$

Es läßt sich aber noch ein anderes Kriterium angeben, welches in vielen Fällen leichter zu handhaben ist.

Zu diesem Zwecke bezeichne man die Ausdrücke  $A_1x + B_1y + C_1$ ,  $A_2x + B_2y + C_2$  und  $A_3x + B_3y + C_3$  zur Abkürzung resp. mit  $G_1$ ,  $G_2$  und  $G_3$ , wodurch die Gleichungen der drei Geraden in der symbolischen Form  $G_1 = 0$ ,  $G_2 = 0$  und  $G_3 = 0$  erscheinen. Man erkennt alsdann zunächst, daß jede Gerade, welche durch den Schnittpunkt  $S$  der beiden ersten Geraden  $G_1 = 0$  und  $G_2 = 0$  hindurchgeht, eine Gleichung von der Form  $\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 = 0$  besitzt, und daß umgekehrt jede Gleichung von dieser Form eine bestimmte durch  $S$  gehende Gerade darstellt. Das letztere ist unmittelbar klar, da die Gleichung  $\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 = 0$  in Bezug auf  $x$  und  $y$  linear ist und durch die Koordinaten von  $S$ , für welche ja  $G_1$  und  $G_2$  einzeln verschwinden, erfüllt wird. Andererseits aber kann man das Verhältnis der beiden Multiplikatoren  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  stets eindeutig so bestimmen, daß die Gerade  $\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 = 0$ , oder ausführlicher geschrieben:

$$\lambda_1(A_1x + B_1y + C_1) + \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2) = 0,$$

beispielsweise durch einen beliebig gegebenen, von  $S$  verschiedenen Punkt  $(x_0, y_0)$  hindurchgeht, oder auch einen vorgeschriebenen Richtungskoeffizienten  $\mu$  besitzt. Im ersten Falle nämlich setze man  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -\frac{A_2 x_0 + B_2 y_0 + C_2}{A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1}$ , im zweiten berechne man  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$  aus  $\mu = -\frac{\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2}{\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2}$ . Damit ist auch der erste Teil unserer Behauptung erwiesen.

Alle durch  $S$  hindurchgehenden Strahlen bilden ein sogenanntes Strahlenbüschel. Man kann also jeden Strahl des durch die Geraden  $G_1 = 0$  und  $G_2 = 0$  bestimmten Strahlenbüschels durch eine Gleichung von der Form  $\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 = 0$  darstellen, insofern man nur die Multiplikatoren  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ , die man auch variable Parameter nennt, passend bestimmt. Die Gleichung  $\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 = 0$  heißt daher kurz die Gleichung des durch  $G_1 = 0$  und  $G_2 = 0$  bestimmten Strahlenbüschels.

Um nun zu unterscheiden, ob eine dritte Gerade  $G_3 = 0$  dem Strahlenbüschel  $\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 = 0$  angehöre, bestimme man  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  so, daß die Gerade  $\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 = 0$  durch irgend einen Punkt von  $G_3 = 0$  hindurchgeht. Gehört jetzt die Gerade  $G_3 = 0$  dem Büschel an, so muß sie mit der soeben eindeutig bestimmten Geraden  $\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 = 0$  identisch sein. Nach § 20 können sich dann aber die Ausdrücke  $G_3$  und  $\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2$  nur durch einen konstanten, von Null verschiedenen Faktor unterscheiden. Nennen wir denselben  $-\lambda_3$ , so muß für jedes Wertepaar  $x, y$  die Identität  $\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 \equiv -\lambda_3 G_3$ , oder  $\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \lambda_3 G_3 \equiv 0$  stattfinden. Umgekehrt, wenn man drei von Null verschiedene Multiplikatoren  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  so bestimmen kann, daß der Ausdruck  $\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \lambda_3 G_3$  identisch verschwindet, so gehen die drei Geraden  $G_1 = 0, G_2 = 0, G_3 = 0$  durch einen und denselben Punkt. Denn setzt man in die Identität  $\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \lambda_3 G_3 \equiv 0$  die Koordinaten des Schnittpunktes  $S$  von  $G_1 = 0$  und  $G_2 = 0$  ein, so erhält man, weil  $G_1$  und  $G_2$  alsdann einzeln verschwinden,  $\lambda_3 G_3 = 0$  und folglich  $G_3 = 0$ , d. h.  $S$  liegt auch auf  $G_3 = 0$ . Wir erhalten somit den wichtigen Satz:

Damit drei Geraden  $G_1 = 0$ ,  $G_2 = 0$ ,  $G_3 = 0$  sich in einem und demselben Punkte schneiden, ist notwendig und hinreichend, daß drei von Null verschiedene Multiplikatoren  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  existieren, für welche die Identität  $\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \lambda_3 G_3 \equiv 0$  stattfindet.

Mit Benutzung dieses Satzes folgt jetzt aus früher behandelten Beispielen, daß in jedem Dreiecke die Mittellinien (§ 16, Aufg. 6), die Höhen (§ 24, Aufg. 7) und die Senkrechten in den Mitten der Seiten (§ 24, Aufg. 8) sich je in einem und demselben Punkte schneiden.

Aufg. 1. Untersuche durch Anwendung der beiden im Texte gegebenen Kriterien, ob sich die Geraden  $3x - 5y - 7 = 0$ ,  $7x + 2y - 4 = 0$ ,  $10x - 3y - 11 = 0$  in demselben Punkte schneiden.

Aufg. 2. Löse dieselbe Aufgabe für die Geraden  $x - 2y = 0$ ,  $3x + 5y = 0$ ,  $2x + 7y + 3 = 0$ .

Aufg. 3. Untersuche das durch die Geraden  $x = 0$ ,  $y = 0$  bestimmte Strahlenbüschel. Diskutiere ebenso die Gleichung  $y - y_1 = \mu(x - x_1)$  als die Gleichung des durch  $x = x_1$ ,  $y = y_1$  bestimmten Strahlenbüschels.

Aufg. 4. Diskutiere die Formel in § 23, Aufg. 6 für den Fall, daß Zähler oder Nenner verschwinden.

Aufg. 5. Jedem Werte des Verhältnisses  $\lambda_1 : \lambda_2$  entspricht eine ganz bestimmte Gerade des Büschels  $\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 = 0$ , und umgekehrt. Man erhält daher sämtliche Strahlen des Büschels, wenn man jenes Verhältnis alle Werte von  $-\infty$  bis  $+\infty$  durchlaufen läßt. Welchen Werten von  $\lambda_1 : \lambda_2$  entsprechen die beiden Geraden  $G_1 = 0$  und  $G_2 = 0$ ? Man untersuche speziell den Fall, daß  $G_1 = 0$  und  $G_2 = 0$  einander parallel sind.

Aufg. 6. Die drei Geraden  $G_1 = 0$ ,  $G_2 = 0$ ,  $G_3 = 0$  mögen sich in demselben Punkte schneiden. Dann giebt es drei Faktoren  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , sodaß  $\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \lambda_3 G_3 \equiv 0$  ist. Angenommen, die drei Faktoren  $\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3'$  leisteten das Gleiche, so muß sein  $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = \lambda_1' : \lambda_2' : \lambda_3'$ . In diesem Sinne sind also jene drei Multiplikatoren eindeutig.

Aufg. 7. Was folgt aus der Identität  $\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \lambda_3 G_3 \equiv 0$ , wenn einer oder mehrere der Faktoren  $\lambda$  gleich Null sind?

Aufg. 8. Man beweise, daß die Mittellinien eines Dreiecks, mit den Seiten  $CB = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ , sich in einem Punkte schneiden. (Man wähle  $CB$  als  $x$ -Achse und  $CA$  als  $y$ -Achse eines schiefwinkligen Systems.)

Aufg. 9. Durch die Geraden  $2x - 7y + 11 = 0$  und  $5x + 3y - 1 = 0$  sei ein Strahlenbüschel definiert. Wie heißen die Gleichungen derjenigen Strahlen des Büschels, welche durch die Punkte  $(-2, 3)$ ,  $(5, 0)$ ,  $(0, 0)$  gehen, sowie derjenigen, welche den Achsen parallel sind?

Aufg. 10. Von den Strahlen des durch  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  und  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$  bestimmten Büschels geht einer durch den Schnittpunkt der beiden Geraden  $A_1'x + B_1'y + C_1' = 0$  und  $A_2'x + B_2'y + C_2' = 0$ , während zwei andere diesen Geraden parallel sind. Bestimme die Gleichungen dieser drei Strahlen. Lasse insbesondere die beiden Geraden mit den Achsen zusammenfallen.

## § 26. Die Gleichungen der Winkelhalbierenden zweier Geraden zu finden.

Unter Voraussetzung rechtwinkliger Koordinaten mögen die Gleichungen der beiden Geraden in der Normalform gegeben sein und heißen:

$$\begin{aligned} x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - \delta_1 &= 0, \\ x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - \delta_2 &= 0. \end{aligned}$$

Wir wollen die linken Seiten der beiden Gleichungen zur Abkürzung mit  $g_1$  resp.  $g_2$  bezeichnen. Es ist dann  $g_1$  der, mit dem entgegengesetzten Zeichen genommene, Abstand des Punktes  $(x, y)$  von der ersten Geraden und ebenso  $g_2$  der, mit dem entgegengesetzten Zeichen genommene, Abstand des Punktes  $(x, y)$  von der zweiten Geraden. Die Halbierungslinie desjenigen Winkels der beiden Geraden  $g_1 = 0$  und  $g_2 = 0$ , in welchem sich der Anfangspunkt befindet, ist dann dadurch ausgezeichnet, daß jeder Punkt  $(x, y)$  derselben von den beiden Geraden auch hinsichtlich des Vorzeichens gleiche Abstände besitzt. Für jeden Punkt  $(x, y)$  dieser Halbierungslinie, und nur für einen solchen, ist daher:

$$g_1 = g_2,$$

oder ausführlicher:

$$x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - \delta_1 = x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - \delta_2,$$

und dies ist daher die Gleichung der betreffenden Halbierungslinie. Die Punkte der andern, darauf senkrecht stehenden Halbierungslinie aber haben allemal entgegengesetzt gleiche Abstände von den beiden gegebenen Geraden, für sie ist daher:

$$g_1 = -g_2,$$

und folglich lautet die Gleichung dieser zweiten Winkelhalbierenden:

$$x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - \delta_1 = -(x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - \delta_2).$$

Behalten wir die abgekürzte Bezeichnung bei, so können wir also die Gleichungen der Winkelhalbierenden der beiden Geraden  $g_1 = 0$  und  $g_2 = 0$  in der Form schreiben:

$$g_1 - g_2 = 0 \quad \text{und} \quad g_1 + g_2 = 0.$$

Aufg. 1. Die Seiten eines Dreiecks seien durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - \delta_1 &= 0, & x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - \delta_2 &= 0, \\ x \cos \alpha_3 + y \sin \alpha_3 - \delta_3 &= 0, \end{aligned}$$

oder abgekürzt durch  $g_1 = 0$ ,  $g_2 = 0$ ,  $g_3 = 0$  gegeben. Nimmt man den Anfangspunkt im Innern des Dreiecks an, so heißen die Gleichungen der Halbierungslinien der Dreieckswinkel:

$$g_2 - g_3 = 0, \quad g_3 - g_1 = 0, \quad g_1 - g_2 = 0$$

und der Halbierungslinien der entsprechenden Außenwinkel:

$$g_2 + g_3 = 0, \quad g_3 + g_1 = 0, \quad g_1 + g_2 = 0.$$

Addiert man die drei ersten Gleichungen (man habe immer vor Augen, welche Ausdrücke  $g_1$ ,  $g_2$ ,  $g_3$  resp. bedeuten), so erhält man identisch Null, d. h. die drei Halbierungslinien der Dreieckswinkel gehen durch einen Punkt. In ähnlicher Weise kann man aber auch z. B. aus den Gleichungen:

$$g_2 - g_3 = 0, \quad g_3 + g_1 = 0, \quad g_1 + g_2 = 0$$

(indem man sie resp. mit 1, 1, -1 multipliziert und addiert) identisch Null erhalten und so den Satz beweisen: Die Halbie-



rungslinien je zweier Außenwinkel und des entsprechenden dritten Dreieckswinkels treffen sich in einem Punkte.

Aufg. 2. Bestimme (durch Reduktion auf die Normalform) die Gleichungen der Halbierungslinien von:

$$4x - 3y - 2 = 0 \quad \text{und} \quad 5y + 12x + 3 = 0$$

und zeige, daß sie auf einander senkrecht stehen.

Aufg. 3. Löse dieselbe Aufgabe für die Geraden:

$$y = \mu_1 x + b_1, \quad y = \mu_2 x + b_2.$$

Aufg. 4. Zeige, daß die Gleichungen der Winkelhalbierenden der Geraden:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \quad \text{und} \quad A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

sich in der Form:

$$\frac{A_1 x + B_1 y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{A_2 x + B_2 y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

darstellen lassen.

Aufg. 5. Unter Benutzung derselben Bezeichnungen und Voraussetzungen wie in Aufg. 1 ist zunächst einzusehen, daß  $g_1 + g_2 + g_3 = 0$  die Gleichung einer Geraden ist, welche durch den Schnittpunkt von  $g_1 = 0$  und  $g_2 + g_3 = 0$  hindurchgeht (§ 25). Daraus ist dann folgender Satz leicht abzuleiten: Die Halbierungslinien der drei Außenwinkel eines Dreiecks schneiden die gegenüberliegenden Seiten in drei Punkten, welche in derselben Geraden liegen. Die Gleichung dieser Geraden ist  $g_1 + g_2 + g_3 = 0$ .

Aufg. 6. Ebenso ist zu zeigen, daß  $g_1 - g_2 - g_3 = 0$  die Gleichung einer Geraden ist, welche durch den Schnittpunkt von  $g_1 = 0$  und  $g_2 + g_3 = 0$ , aber auch durch den Schnittpunkt von  $g_2 = 0$  und  $g_3 - g_1 = 0$  und endlich auch durch den Schnittpunkt von  $g_3 = 0$  und  $g_1 - g_2 = 0$  hindurchgeht. Dies führt zu dem Satze: Die Halbierungslinien zweier innerer Winkel und des dritten Außenwinkels eines Dreiecks schneiden die gegenüberliegenden Seiten in Punkten einer Geraden. Solcher Geraden giebt es dann aber drei, ihre Gleichungen sind:

$$g_1 - g_2 - g_3 = 0, \quad g_2 - g_3 - g_1 = 0, \quad g_3 - g_1 - g_2 = 0.$$

Aufg. 7. Diskutiere das Strahlenbüschel  $\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 = 0$  und beachte insbesondere die Werte  $\lambda_1 : \lambda_2 = +1, -1, 0, \infty$ . Untersuche speziell den Fall, daß  $g_1 = 0$  und  $g_2 = 0$  einander parallel sind.

Aufg. 8. Geib die Gleichungen derjenigen durch den Anfangspunkt gehenden Strahlen an, welche den ersten und zweiten Quadranten in 2, 4, 8 etc. gleiche Teile teilen.

### § 27. Affine Punktsysteme.

In einem beliebigen Koordinatensysteme sei eine endliche oder unendliche Anzahl von Punkten  $P_1', P_2', P_3', \dots$  gegeben, deren Gesamtheit wir ein Punktsystem nennen wollen. Aus diesem Punktsysteme können wir ein anderes  $P_1'', P_2'', P_3'', \dots$  dadurch ableiten, daß wir die Abscissen  $x_1', x_2', x_3', \dots$  der Punkte  $P_1', P_2', P_3', \dots$  ungeändert lassen, ihre Ordinaten  $y_1', y_2', y_3', \dots$  aber mit dem konstanten Verhältnisse  $b:a$  multiplizieren. Die Koordinaten der Punkte  $P_i''$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) sind daher mit denjenigen der entsprechenden Punkte  $P_i'$  durch die Gleichungen verbunden:

$$(1) \quad x_i'' = x_i', \quad y_i'' = \frac{b}{a} y_i', \quad (i = 1, 2, 3, \dots).$$

Zwei derartige Punktsysteme nennt man affin und man erkennt, daß, wenn das Affinitätsverhältnis  $b:a$  von dem ersten Systeme zu dem zweiten führt, man durch das reziproke Verhältnis  $a:b$  von dem zweiten wieder zu dem ersten zurückgelangt. Die Affinität zweier Systeme ist also stets eine gegenseitige.

Aus der Definition der Affinität zweier Punktsysteme folgt zunächst, daß die Punkte der  $x$ -Achse, welche auch Affinitätsachse heißt, sich selbst entsprechen. Eine einfache geometrische Betrachtung zeigt sodann ferner, daß ganz allgemein den Punkten einer beliebigen Geraden im affinen Systeme stets wieder die Punkte einer Geraden entsprechen. Um dies auch analytisch festzustellen, nehmen wir an, in dem ersten Systeme sei eine Gerade  $f'$  gegeben durch die Gleichung:

$$(2) \quad y' = \mu x' + n.$$

Den Punkten  $P'$  von  $f'$  entsprechen dann in dem zweiten Systeme Punkte  $P''$ , deren Koordinaten, mit Rücksicht auf (1) und (2), der Gleichung genügen:

$$(3) \quad y'' = \frac{b}{a} (\mu x'' + n), \text{ d. h.:}$$

Den Punkten  $P'$  einer Geraden  $f'$  entsprechen im affinen Systeme die Punkte  $P''$  einer Geraden  $f''$ . Die beiden affinen Geraden treffen sich auf der Affinitätsachse. Der Richtungskoeffizient von  $f''$  ist gleich demjenigen von  $f'$ , multipliziert mit dem Affinitätsverhältnisse  $b:a$ , welches von  $f'$  zu  $f''$  geführt hatte. Parallelen Geraden  $f'_1, f'_2, f'_3, \dots$  des ersten Systemes, mit dem gemeinschaftlichen Richtungskoeffizienten  $\mu$ , entsprechen daher in dem zweiten Systeme wieder parallele Geraden, mit dem gemeinschaftlichen Richtungskoeffizienten  $\frac{b}{a} \mu$ .

Wählt man auf einer Geraden  $f'$  ein beliebiges Stück  $P'_1 P'_2$  und auf der entsprechenden Geraden  $f''$  das entsprechende Stück  $P''_1 P''_2$ , so ergibt sich aus (1), wie auch durch eine einfache geometrische Überlegung, daß entsprechende Punkte  $P'$  und  $P''$  von  $f'$  und  $f''$  mit den Strecken  $P'_1 P'_2$  und  $P''_1 P''_2$  gleiche Teilverhältnisse bestimmen und daß auch umgekehrt Punkte mit gleichen Teilverhältnissen entsprechende sind. Insbesondere sind daher die Mittelpunkte  $M'$  und  $M''$  von  $P'_1 P'_2$  und  $P''_1 P''_2$  entsprechende Punkte der beiden affinen Systeme.

Konstruiert man ferner zu einem beliebigen Polygone  $P'_1 P'_2 \dots P'_n$  das affine Polygon  $P''_1 P''_2 \dots P''_n$  und berechnet nach § 13 den Inhalt  $J'$  resp.  $J''$ , so folgt aus Gl. (1):

$$(4) \quad J'' = \frac{b}{a} J'.$$

Der in dieser Gleichung ausgesprochene Satz läßt noch eine Verallgemeinerung zu. Betrachtet man nämlich eine krummlinig begrenzte, geschlossene Figur als die Grenze, welcher sich ein eingeschriebenes Polygon dadurch nähert, daß die Anzahl der Polygonseiten ins Unendliche wächst,

und berücksichtigt, daß der in Gl. (4) enthaltene Satz ganz unabhängig von der Anzahl der Polygonseiten ist, so ergibt sich die wichtige Folgerung:

Konstruiert man zu einer beliebigen krummlinig oder gradlinig begrenzten, geschlossenen Figur, mit Benutzung des Affinitätsverhältnisses  $b:a$ , die affine Figur, so erhält man den Inhalt der zweiten, indem man den Inhalt der ersten mit dem Affinitätsverhältnis  $b:a$  multipliziert.

Aufg. 1. Zeichne einem Kreise reguläre Polygone von 3, 4, 5, 6, 8, 10 Seiten ein und konstruiere, unter Voraussetzung eines beliebigen Affinitätsverhältnisses, einer beliebigen Affinitätsachse und einer beliebigen Ordinatenachse, je die affine Figur. Benutze dabei den Satz, daß affine Geraden sich auf der Affinitätsachse schneiden. Wähle sodann speziell eine Symmetrielinie der gegebenen Polygone als Affinitätsachse.

Aufg. 2. Ist in zwei affinen Systemen die Affinitätsachse die einzige Gerade, welche sich selbst entspricht? Zeige, daß es solcher unendlich viele giebt, beachte aber, daß die einzelnen Punkte derselben sich nicht immer selbst entsprechen.

Aufg. 3. Können affine Geraden einander parallel sein?

Aufg. 4. Zeige, daß in affinen Systemen entsprechende Winkel im allgemeinen nicht einander gleich, affine Dreiecke also einander nicht ähnlich sind.

Aufg. 5. Durch die Geraden  $2x - 5y + 3 = 0$  und  $3x + y - 2 = 0$  wird ein Strahlenbüschel bestimmt. Gieb für  $b:a = 2$  die Gleichung des affinen Büschels an und studiere das gegenseitige Verhalten beider Büschel mit besonderer Berücksichtigung der Aufgaben (2) und (3).

Aufg. 6. Bestimme den Winkel der zu den Geraden  $y = \mu x + n_1$  und  $y = -\frac{1}{\mu}x + n_2$  affinen Geraden.

Aufg. 7. Studiere die Affinität, welche dem Verhältnisse  $b:a = -1$  entspricht (schiefe und rechtwinklige Symmetrie; Symmetrieachse).

§ 28. Sätze aus der Theorie der Transversalen.  
Das vollständige Viereck.

I. Die Seiten  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$  des Dreiecks  $ABC$  mögen von einer beliebigen Geraden (Transversalen) in den Punkten  $A_1, B_1, C_1$ , mit den Teilverhältnissen:

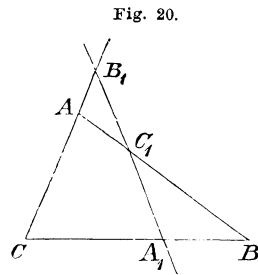


Fig. 20.

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \lambda, \quad \frac{CB_1}{B_1A} = \mu, \quad \frac{AC_1}{C_1B} = \nu,$$

getroffen werden. Dann ist klar, daß durch  $\lambda$  und  $\mu$  die Transversale und folglich auch  $\nu$  eindeutig bestimmt sind. Es muß also zwischen  $\lambda, \mu, \nu$  eine Relation bestehen, welche wir suchen wollen.

Zu diesem Zwecke wählen wir  $CB$  zur  $x$ -Achse und  $CA$  zur  $y$ -Achse eines schiefwinkligen Systems. Dann folgt aus § 9, daß die Abscisse von  $A_1$  gleich  $\frac{a}{1+\lambda}$  und die Ordinate von  $B_1$  gleich  $\frac{\mu b}{1+\mu}$  ist. Die Gleichungen von  $AB$  und  $A_1B_1$  sind daher (§ 18):

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$\frac{x}{a} (1 + \lambda) + \frac{y}{b} \frac{1 + \mu}{\mu} = 1.$$

Daraus ergibt sich die Abscisse des Schnittpunktes  $C_1$  (§ 23) gleich  $\frac{a}{1 - \lambda\mu}$ . Dieselbe ist aber auch andererseits gleich  $\frac{\nu a}{1 + \nu}$ , insofern  $C_1$  in Bezug auf die Strecke  $AB$  das Teilverhältnis  $\nu$  besitzt. Aus:

$$\frac{\nu a}{1 + \nu} = \frac{a}{1 - \lambda\mu}$$

folgt jetzt:

$$\lambda\mu\nu = -1,$$

oder:

$$(1) \quad \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = -1.$$

Diese Relation heißt der Satz des Menelaus.

II. Verbindet man einen beliebigen Punkt  $P$  mit den Ecken  $A, B, C$  eines Dreiecks, so treffen diese Verbindungslinien die gegenüberliegenden Seiten in Punkten  $A_1, B_1, C_1$ , denen die Teilverhältnisse:

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \lambda, \quad \frac{CB_1}{B_1A} = \mu, \\ \frac{AC_1}{C_1B} = \nu$$

zukommen mögen. Da  $\lambda$  und  $\mu$  den Punkt  $P$  und folglich auch  $C_1$  eindeutig bestimmen, so muß es möglich sein,  $\nu$  aus  $\lambda$  und  $\mu$  zu berechnen.

Indem wir uns desselben Koordinatensystems bedienen wie bei I, erhalten wir wieder für  $A_1$  die Abscisse  $\frac{a}{1+\lambda}$ , für  $B_1$  die Ordinate  $\frac{\mu b}{1+\mu}$ , so daß die Gleichungen von  $AA_1$  und  $BB_1$  geschrieben werden können:

$$\frac{x}{a}(1+\lambda) + \frac{y}{b} = 1, \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \frac{1+\mu}{\mu} = 1.$$

Durch Subtraktion erhält man:

$$\frac{x}{a} \lambda - \frac{y}{b} \frac{1}{\mu} = 0,$$

als die Gleichung einer durch  $P$  gehenden Geraden (§ 25), welche, da das absolute Glied fehlt, keine andere sein kann als  $CC_1$ . Aus der Gleichung von  $CC_1$  und der Gleichung  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$  von  $AB$  findet man die Abscisse  $\frac{a}{1+\lambda\mu}$  des Punktes  $C_1$ , der andererseits auch die Abscisse  $\frac{\nu a}{1+\nu}$  besitzt. Aus:

$$\frac{\nu a}{1+\nu} = \frac{a}{1+\lambda\mu}$$

folgt aber:

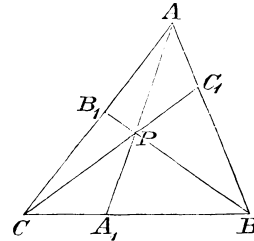
$$\lambda\mu\nu = +1,$$

oder:

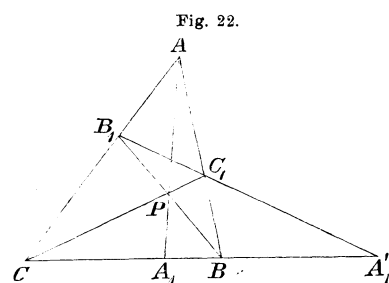
$$(2) \quad \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = +1.$$

Diese Relation heißt der Satz des Ceva.

Fig. 21.



III. In folgender Weise lassen sich die Resultate von I und II kombinieren. Wir verbinden  $B_1C_1$  durch eine Trans-



versale, welche die Seite  $BC$  in dem Punkte  $A_1'$  treffen möge.  $A_1'$  bildet dann mit  $BC$  das Theilverhältnis  $\frac{BA_1'}{A_1'C}$ , welches wir mit  $\lambda'$  bezeichnen. Bedeuten dann wieder  $\lambda, \mu, \nu$  die Theilverhältnisse von  $A_1, B_1, C_1$ , so kann man zunächst auf die Transver-

sale  $B_1C_1A_1'$  den Satz I anwenden und erhält:

$$\lambda'\mu\nu = -1.$$

Andrerseits ist infolge von Satz II:

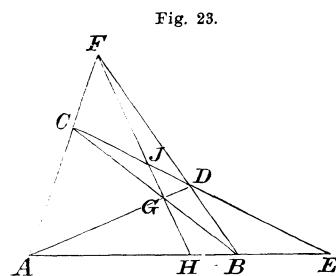
$$\lambda\mu\nu = +1,$$

woraus sich ergibt:

$$\lambda' = -\lambda,$$

d. h. die Punkte  $B, C$  werden durch die Punkte  $A_1, A_1'$  harmonisch getrennt.

Seien jetzt vier beliebige Punkte  $A, B, C, D$  gegeben, so kann man sie als die Ecken eines vollständigen Vierecks mit den sechs Seiten  $AB, CD; AC, BD; AD, BC$  betrachten, welche sich noch in den Diagonalepunkten  $E, F, G$  treffen. Verbindet



man dann  $F$  mit  $G$  durch eine Gerade, welche  $AB$  in  $H$ ,  $CD$  in  $J$  schneidet, so erkennt man leicht, daß  $A, B$  durch  $E, H$  und ebenso  $C, D$  durch  $E, J$  harmonisch getrennt werden. Man braucht nämlich nur den soeben bewiesenen, aus der Kombination von I und II hervorgegangenen

Satz das eine Mal anzuwenden auf das Dreieck  $ABF$ , mit der Transversalen  $CD$  und dem Punkte  $G$ , das andere Mal auf das Dreieck  $CDE$ , mit der Transversalen  $AB$  und dem Punkte  $G$ . In ähnlicher Weise erkennt man, daß die Verbindungslinie  $EG$  die Seiten  $AC$  und  $BD$  in Punkten trifft, die, mit  $F$  als

zugeordnetem Punkte,  $A$  und  $C$ , resp.  $B$  und  $D$  harmonisch trennen. Und endlich schneidet auch die Verbindungslinie  $EF$  die Seiten  $AD$  und  $BC$  in Punkten, die, mit  $G$  als zugeordnetem Punkte, die Punkte  $A, D$  und  $B, C$  harmonisch trennen. So erhalten wir also durch Verbindung der drei Diagonalepunkte  $E, F, G$  auf jeder der sechs Seiten des vollständigen Vierecks harmonische Gruppen. Diese harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierecks gestatten, in einfacher Weise, durch Anwendung des Lineals allein, zu drei gegebenen Punkten den vierten harmonischen Punkt zu konstruieren.

Aufg. 1. Beachte bei den Sätzen von Menelaus und Ceva jedesmal die Vorzeichen der in Betracht kommenden Strecken. Wähle für  $\lambda$  und  $\mu$  spezielle Zahlenwerte und bestimme jedesmal  $\nu$ . Was sagen die beiden Sätze z. B. aus für  $\lambda = \mu = 1$ ?

Aufg. 2. Es sind drei Punkte  $A, B, C$  gegeben. Man suche den vierten harmonischen,  $C$  zugeordneten Punkt a) wenn  $C$  zwischen  $A$  und  $B$ , b) wenn  $C$  außerhalb der Strecke  $AB$  sich befindet.

### § 29. Geometrische Örter.

Unter dem geometrischen Orte eines Punktes versteht man bekanntlich eine Linie, deren sämtliche Punkte einer und derselben Bedingung unterworfen sind. Denkt man sich, unter Benutzung eines Koordinatensystems, diese Bedingung durch die Koordinaten  $x, y$  des Punktes, dessen Ort bestimmt werden soll, ausgedrückt, so erhält man eine Gleichung zwischen  $x$  und  $y$ , die allemal, aber auch nur dann, erfüllt wird, wenn der Punkt  $(x, y)$  dem gesuchten Orte angehört, und die man daher als die Gleichung des Ortes bezeichnen kann. Die folgenden Aufgaben sollen dies noch weiter erläutern.

Aufg. 1. Den Ort des Punktes zu bestimmen, der von zwei festen Punkten  $(a_1, b_1)$  und  $(a_2, b_2)$  denselben Abstand hat.

Bezeichnet man die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes, dessen Ort bestimmt werden soll, mit  $x, y$ , so sind diese der Bedingung unterworfen:



$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 \quad (\S 8),$$

aus der durch einfache Reduktion folgt:

$$2(a_2 - a_1)x + 2(b_2 - b_1)y = a_2^2 - a_1^2 + b_2^2 - b_1^2.$$

Dies ist aber die Gleichung einer Geraden, welche im Mittelpunkte  $\left(\frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{b_1 + b_2}{2}\right)$  der Verbindungslinie der gegebenen Punkte auf dieser senkrecht steht (§ 24).

Aufg. 2. Von einem Dreiecke seien gegeben die Basis und die Differenz der Quadrate der Seiten; man sucht den Ort der Spitze.

Wir wählen die Basis  $AB = 2c$  zur Abscissenachse eines rechtwinkligen Achsensystems, mit dem Mittelpunkte  $O$  von  $AB$  als Anfangspunkt. Dann haben wir die Bedingung:

$$AC^2 - BC^2 = d^2$$

(wo  $d^2$  die gegebene Differenz ist) durch die Koordinaten  $x, y$  der Spitze  $C$  auszudrücken. Es ist aber:

$$AC^2 = (c + x)^2 + y^2, \quad BC^2 = (c - x)^2 + y^2,$$

folglich:

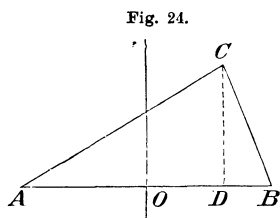
$$AC^2 - BC^2 = 4cx = d^2,$$

oder:

$$x = \frac{d^2}{4c},$$

d. h. der Ort ist die Senkrechte, die man auf der Basis, im Abstände  $\frac{d^2}{4c}$  vom Anfangspunkte, errichten kann.

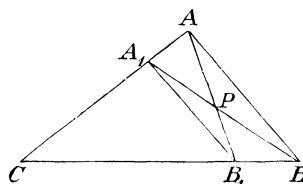
Bei vielen Aufgaben, die sich auf geometrische Örter beziehen, ist es nicht möglich, die Bedingung, welcher der veränderliche Punkt unterworfen ist, direkt durch eine zwischen den Koordinaten  $x, y$  derselben bestehende Gleichung auszudrücken. Man ist vielmehr oft genötigt, zunächst  $x$  und  $y$  einzeln durch andere Veränderliche auszudrücken oder Relationen zwischen  $x, y$  und diesen anderen Veränderlichen herzustellen, und man erhält dann die Gleichung des Ortes erst durch Elimination dieser Veränderlichen. Solche veränderliche Hilfsgrößen nennt man Parameter. Wir geben hierfür einige Beispiele.



Aufg. 3. Zu der einen Seite eines Dreiecks werden Parallelen gezogen und die mit den beiden anderen Seiten des Dreiecks gebildeten Schnittpunkte jedesmal mit den Gegenpunkten verbunden. Man sucht den Ort des Schnittpunktes dieser Verbindungslinien.

Man wähle  $CB$  und  $CA$  als Koordinatenachsen eines schiefwinkligen Systems. Da die Achsenabschnitte der zur dritten Dreiecksseite  $AB$  parallelen Geraden  $A_1B_1$  den Seiten  $CB = a$  und  $CA = b$  proportional sind, so kann man sie durch  $\lambda a$  und  $\lambda b$  ausdrücken, insofern  $\lambda$  einen veränderlichen Parameter bedeutet. Jeder der unzählig vielen Parallelen entspricht dann ein ganz bestimmter Wert von  $\lambda$ , und umgekehrt gehört zu jedem  $\lambda$  eine ganz bestimmte Parallele zu  $AB$ .

Fig. 25.



Die Gleichungen von  $A_1B$  und  $AB_1$  lauten nun:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{\lambda b} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{x}{\lambda a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Hier haben wir also zwei Relationen zwischen  $x$ ,  $y$  und  $\lambda$ . Aus diesen kann man eine einzige herstellen, in welcher  $\lambda$  fehlt, dadurch, daß man die zweite Gleichung von der ersten subtrahiert und dann mit  $1 - \frac{1}{\lambda}$  dividiert. Man erhält:

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$$

als Gleichung des gesuchten Ortes. Dieser ist demnach die durch  $C$  gehende Mittellinie des Dreiecks (§ 25, Aufg. 8).

Aufg. 4. In einem schiefwinkligen Achsensysteme bewege sich eine Gerade so, daß die Summe ihrer Achsenabschnitte konstant ist. Jedesmal werde das zwischen den Achsen befindliche Stück der Geraden durch einen Punkt in einem konstanten Teilverhältnis geteilt. Welches ist der Ort dieses Punktes?

Es sei:  $OA = a$ ,  $OB = b$ ,

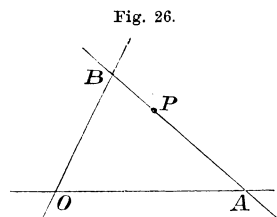
$a + b = c$  und  $\frac{AP}{PB} = \lambda$ . Die Koordinaten von  $P$  heißen dann:

$$x = \frac{a}{1+\lambda}, \quad y = \frac{\lambda b}{1+\lambda}.$$

Fügt man zu diesen beiden Gleichungen noch  $a + b = c$ , so hat man drei Gleichungen zwischen  $x$  und  $y$  und den beiden

Parametern  $a$  und  $b$ . Um diese letzteren zu eliminieren, multipliziere man die erste Gleichung mit  $\lambda$  und addiere hierzu die zweite, wodurch man für die Gleichung des gesuchten Ortes erhält:

$$\lambda x + y = \frac{\lambda c}{1+\lambda}.$$



Aufg. 5. Bestimme den geometrischen Ort der Mittelpunkte der einem beliebigen Vierecke eingeschriebenen Parallelogramme, unter Benutzung der Diagonalen des Vierecks als Koordinatenachsen.

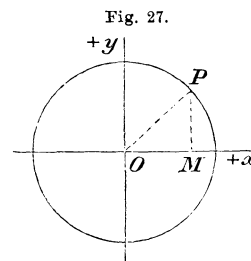
### § 30. Hauptaufgabe und Methode der analytischen Geometrie.

Durch die bisherigen Untersuchungen haben wir einen eigentümlichen Zusammenhang kennen gelernt zwischen einem geometrischen Gebilde, nämlich einer geraden Linie, einerseits und einer algebraischen Gleichung mit zwei Unbekannten andererseits. Wir sahen, daß zu jeder geraden Linie eine Gleichung mit zwei Unbekannten  $x$  und  $y$  gehört, welche in Bezug auf diese vom ersten Grade ist und allemal, aber auch nur dann, erfüllt wird, wenn  $x$  und  $y$  die Koordinaten eines Punktes der Geraden darstellen. Umgekehrt konnten wir jede Gleichung von der Form  $Ax + By + C = 0$  als die Gleichung einer geraden Linie deuten. (Wegen dieses Zusammenhangs nennt man auch die Gleichung  $Ax + By + C = 0$  eine lineare Gleichung.)

Es drängt sich nun die Frage auf, ob, unter Benutzung eines bestimmten Koordinatensystems, für jede durch ein bestimmtes mathematisches Gesetz definierte Kurve eine Gleichung mit zwei Unbekannten  $x$  und  $y$  gefunden werden kann, welche allemal, aber auch nur dann, befriedigt wird, wenn  $x$  und  $y$  die Koordinaten eines Punktes der Kurve bedeuten, und ob umgekehrt jede zwischen zwei Unbekannten  $x$  und  $y$

bestehende Gleichung in der angegebenen Weise als Gleichung einer bestimmten Kurve gedeutet werden kann.

Die in dem vorhergehenden Paragraphen an einzelnen Beispielen entwickelten Methoden führen zur Beantwortung dieser Fragen. Denn denken wir uns eine Kurve als den geometrischen Ort eines Punktes definiert, welcher einer bestimmten Bedingung unterworfen ist, so hat man nur diese Bedingung durch die Koordinaten des Punktes, dessen Ort die gegebene Kurve ist, auszudrücken und erhält eine Gleichung zwischen  $x$  und  $y$ , welche allemal, und nur dann, erfüllt wird, wenn  $x$  und  $y$  die Koordinaten eines Punktes der Kurve bedeuten. Definiert man z. B. den Kreis als den Ort eines Punktes, dessen Abstand von einem festen Punkte, den wir zum Anfangspunkte eines rechtwinkligen Koordinatensystems wählen wollen, konstant gleich  $r$  ist, so läßt sich die dem Punkte  $P$  auferlegte Bedingung durch die Gleichung  $x^2 + y^2 = r^2$  ausdrücken. Diese Gleichung gilt für alle Punkte des Kreises mit dem Radius  $r$ , aber auch nur für diese. Für jeden Punkt innerhalb des Kreises ist  $x^2 + y^2 < r^2$ , für jeden Punkt außerhalb des Kreises ist  $x^2 + y^2 > r^2$ .



Wir werden demnach die Gleichung  $x^2 + y^2 = r^2$  (weil ausschließlich den Punkten des Kreises zukommend) als die Gleichung des Kreises mit dem Radius  $r$  bezeichnen, indem wir definieren:

Unter der Gleichung einer Kurve in Bezug auf ein gegebenes Koordinatensystem versteht man eine Gleichung zwischen zwei Unbekannten  $x$  und  $y$ , welche allemal, aber auch nur dann, erfüllt wird, wenn  $x$  und  $y$  die Koordinaten eines Punktes der Kurve bedeuten.

Für den Fall einer geraden Linie, aber auch nur dann, ist diese Gleichung in Bezug auf  $x$  und  $y$  linear.

Umgekehrt läßt sich jede Gleichung zwischen zwei Unbekannten  $x$  und  $y$  in dem angegebenen Sinne als die Gleichung einer Kurve deuten. Denn man kann in einer solchen Gleichung der einen Unbekannten, etwa  $x$ , einen beliebigen

Wert beilegen und dann die Gleichung nach der andern Unbekannten auflösen. Dadurch erhält man ein Wertepaar  $x, y$ , welches der Gleichung genügt und welches man geometrisch durch einen Punkt mit der Abscisse  $x$  und der Ordinate  $y$  repräsentieren kann. Wiederholt man dieses Verfahren, indem man  $x$  alle möglichen Werte giebt und jedesmal das zugehörige  $y$  berechnet, so erhält man eine Aufeinanderfolge von Punkten, die sich zu einer Kurve vereinigen.

Nach diesen Auseinandersetzungen ist z. B. klar, wie man analytisch die Durchschnittspunkte von zwei durch ihre Gleichungen gegebenen Kurven bestimmt. Die Koordinaten der gemeinschaftlichen Punkte müssen den beiden Kurvengleichungen gleichzeitig genügen, und man erhält sie daher als die gemeinschaftlichen Lösungen derselben. Auf diese Weise wird das ursprünglich geometrische Problem in ein rein algebraisches verwandelt.

Wir können nunmehr als das Wesen der analytischen Geometrie die Anwendung algebraischer Methoden auf die Untersuchung geometrischer Gebilde bezeichnen; ihre Aufgabe besteht darin, Kurven in dem oben definierten Sinne durch Gleichungen zu repräsentieren und aus deren Eigenschaften die charakteristischen Eigentümlichkeiten der zugehörigen Kurven zu ergründen.

---

### Drittes Kapitel.

#### Der Kreis.

##### § 31. Die Gleichung des Kreises.

Im vorhergehenden Paragraphen wurde die Gleichung des Kreises abgeleitet für den Fall, daß der Mittelpunkt zum Anfangspunkte eines rechtwinkligen Achsensystems gewählt worden war. Seien jetzt allgemeiner  $p, q$  die rechtwinkligen Koordinaten \*) des Mittelpunktes eines Kreises und  $r$  der

---

\*) In diesem ganzen Kapitel sollen nur rechtwinklige Koordinaten zur Anwendung kommen.

Radius. Um die Gleichung des Kreises zu erhalten, hat man nur auszudrücken, daß jeder Punkt  $(x, y)$  des Kreises vom Mittelpunkte  $(p, q)$  desselben den konstanten Abstand  $r$  besitzt. Dies führt aber (§ 8) zu der Gleichung:

$$(1) \quad (x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2.$$

Diese Gleichung wird allemal, aber auch nur dann, erfüllt, wenn der Punkt  $(x, y)$  auf dem Kreise liegt. Für jeden Punkt innerhalb des Kreises ist die linke Seite der Gleichung (1) kleiner, für jeden Punkt außerhalb des Kreises größer als  $r^2$ .

Aus der allgemeinen Gleichung (1) ergeben sich die speziellen Formen der Kreisgleichung durch besondere Wahl des Mittelpunktes. Liegt dieser auf der  $x$ -Achse, so erhält man, wegen  $q = 0$ , die Gleichung:

$$(2) \quad (x - p)^2 + y^2 = r^2.$$

Berührt überdies noch der Kreis die  $y$ -Achse, d. h. ist  $p = r$ , so folgt:

$$(3) \quad x^2 + y^2 - 2rx = 0.$$

Befindet sich der Mittelpunkt auf der  $y$ -Achse, so lautet die Kreisgleichung:

$$(4) \quad x^2 + (y - q)^2 = r^2,$$

welche sich auf

$$(5) \quad x^2 + y^2 - 2ry = 0$$

reduziert, wenn außerdem noch der Kreis die  $x$ -Achse berührt.

Fällt der Mittelpunkt mit dem Anfangspunkte zusammen (§ 30), so heißt die Kreisgleichung:

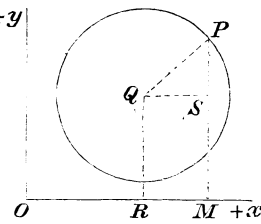
$$(6) \quad x^2 + y^2 = r^2.$$

Endlich erhält man für einen beliebigen, durch den Anfangspunkt gehenden Kreis, dessen Mittelpunkt die Koordinaten  $p, q$  besitzt, wegen  $p^2 + q^2 = r^2$ , die Gleichung:

$$(7) \quad x^2 + y^2 - 2px - 2qy = 0.$$

Da Gleichung (1) durch Multiplikation mit einer beliebigen,

Fig. 28.



von Null verschiedenen Konstanten  $a$  in ihrer Bedeutung nicht geändert wird, so erkennt man:

Die allgemeine Gleichung eines Kreises ist eine in Bezug auf  $x$  und  $y$  quadratische Gleichung, in welcher das Glied mit  $xy$  fehlt und die Glieder mit  $x^2$  und  $y^2$  denselben Koeffizienten besitzen, sie ist also von der Form:

$$(8) \quad ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0.$$

Umgekehrt läßt sich zeigen, daß jede Gleichung dieser Form als die Gleichung eines Kreises angesehen werden kann.

Dividiert man nämlich Gleichung (8) durch  $a$ , so kann man sie leicht auf die Form bringen:

$$(9) \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(y + \frac{c}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c^2}{4a^2} - \frac{d}{a},$$

oder:

$$(x - p_1)^2 + (y - q_1)^2 = r_1^2,$$

insofern man zur Abkürzung setzt:

$$p_1 = -\frac{b}{2a}, \quad q_1 = -\frac{c}{2a}, \quad r_1 = \frac{\sqrt{b^2 + c^2 - 4ad}}{2a},$$

d. h. Gleichung (9) und folglich auch Gleichung (8) ist die Gleichung eines Kreises mit dem Mittelpunkte  $(p_1, q_1)$  und dem Radius  $r_1$ . Dabei ist allerdings vorausgesetzt, daß  $r_1$  reell, d. h. daß  $b^2 + c^2 - 4ad > 0$  sei.

Ist  $b^2 + c^2 - 4ad < 0$ , so kann der Gleichung (9) durch kein reelles Wertepaar  $(x, y)$  genügt werden, folglich hat dann auch Gleichung (8) keine geometrische Bedeutung. Ist endlich  $b^2 + c^2 - 4ad = 0$ , so wird die Gleichung (8) nur durch die Koordinaten des einen Punktes  $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{c}{2a}\right)$  befriedigt.

Aufg. 1. Wie heißt die Gleichung des Kreises mit dem Mittelpunkte  $(-3, -5)$  und dem Radius  $r = 4$ ? Liegt der Anfangspunkt innerhalb oder außerhalb des Kreises?

Aufg. 2. Die Gleichung des durch den Anfangspunkt gehenden Kreises mit dem Mittelpunkte  $(2, -3)$  zu finden.

Aufg. 3. Wie heißt die Gleichung des Kreises, dessen Mittelpunkt  $(5, 0)$  ist und welcher die Gerade  $x - y = 0$  berührt?

Aufg. 4. Bestimme die Schnittpunkte des Kreises:

$$a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0$$

mit den Achsen und zeige, daß das Produkt der beiden auf der  $x$ -Achse gebildeten (vom Anfangspunkte aus gerechneten) Achsenabschnitte gleich dem Produkte der auf der  $y$ -Achse gebildeten Abschnitte ist.

Aufg. 5. Es seien  $m_1, m_2, n_1, n_2$  vier Zahlen, welche der Relation  $m_1 m_2 = n_1 n_2$  genügen. Bestimme die Gleichung des Kreises mit den Achsenabschnitten  $m_1, m_2, n_1, n_2$ .

Aufg. 6. Finde den Mittelpunkt und den Radius des Kreises:

$$2(x^2 + y^2) - 2x + 6y - 3 = 0.$$

Aufg. 7. Die Gleichungen aller Kreise zu finden, welche die  $x$ -Achse im Punkte  $x = a$  berühren.

Aufg. 8. Die Gleichungen aller Kreise zu finden, welche beide Koordinatenachsen berühren.

Aufg. 9. Die Gleichung des um den Anfangspunkt beschriebenen Kreises zu finden, welcher durch den Punkt  $(-5, 3)$  geht.

Aufg. 10. Die Gleichung des um den Anfangspunkt beschriebenen Kreises zu finden, welcher die Gerade:

$$Ax + By + C = 0$$

berührt.

Aufg. 11. Die Gleichung des Kreises zu finden, dessen Mittelpunkt  $(3, -2)$  ist und welcher die Gerade  $y = 7x + 11$  berührt.

### § 32. Bestimmung eines Kreises durch drei Punkte.

Dividiert man die allgemeine Kreisgleichung:

$$ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0$$

durch  $a$ , wodurch die Form:

$$x^2 + y^2 + b'x + c'y + d' = 0$$

entsteht, so erkennt man, daß dieselbe im Grunde genommen nur drei Konstanten enthält, wie auch die Form:

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$$

zeigt. Daraus folgt, daß man einen Kreis stets so bestimmen kann, daß er drei vorgeschriebenen Bedingungen genügt, z. B.



so, daß er durch drei gegebene Punkte hindurch geht. Sind diese  $(x_1, y_1)$ ;  $(x_2, y_2)$ ;  $(x_3, y_3)$ , so muß sein:

$$\begin{aligned}x_1^2 + y_1^2 + b'x_1 + c'y_1 + d' &= 0, \\x_2^2 + y_2^2 + b'x_2 + c'y_2 + d' &= 0, \\x_3^2 + y_3^2 + b'x_3 + c'y_3 + d' &= 0.\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich die Unbekannten  $b', c', d'$ . Bei der Auflösung tritt der gemeinschaftliche Nenner:

$$x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2),$$

oder:

$$x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3$$

auf, der nur dann verschwindet, wenn die drei gegebenen Punkte in einer Geraden liegen. In jedem andern Falle erhält man daher für  $b', c', d'$  bestimmte endliche Werte.

Aufg. 1. Die Gleichung des Kreises zu finden, der dem Dreiecke  $(2, 3)$ ;  $(-5, 1)$ ;  $(3, -2)$  umgeschrieben ist.

Aufg. 2. Die Gleichung des Kreises zu finden, der durch den Anfangspunkt und die beiden Punkte  $(x_1, y_1)$ ;  $(x_2, y_2)$  hindurchgeht.

Aufg. 3. Bestimme in der im Texte angegebenen Weise  $b', c', d'$  und beweise, daß der Radius  $r = \frac{1}{2}\sqrt{b'^2 + c'^2 - 4d'}$  stets reell ist (§ 31).

Aufg. 4. Bestimme den Radius und die Gleichung des Kreises, der durch die Punkte  $(0, 0)$ ;  $(1, 2)$ ;  $(-2, -4)$  geht, und diskutiere das Resultat.

### § 33. Der Kreis und die Gerade.

Um die Lage einer beliebigen Geraden in Bezug auf einen Kreis zu untersuchen, wählen wir den Mittelpunkt des letzteren zum Anfangspunkte eines rechtwinkligen Achsensystems und setzen die Gleichung der Geraden in der Normalform voraus.

Es mögen demnach:

$$(1) \quad x^2 + y^2 = r^2,$$

$$(2) \quad x \cos \alpha + y \sin \alpha - \delta = 0$$

die Gleichungen des Kreises und der Geraden darstellen.

Die Schnittpunkte ergeben sich, indem man etwa aus (2)  $y$  berechnet und in (1) einsetzt. Man erhält dann:

$$(3) \quad x^2 - 2\delta \cos \alpha \cdot x + \delta^2 - r^2 \sin^2 \alpha = 0,$$

und diese in  $x$  quadratische Gleichung liefert die Abscissen der beiden Schnittpunkte. Die Realität der Wurzeln hängt von dem Vorzeichen der Diskriminante:

$$(4) \quad \delta^2 \cos^2 \alpha - \delta^2 + r^2 \sin^2 \alpha = \sin^2 \alpha (r^2 - \delta^2)$$

ab, woraus man erkennt, daß jede Gerade den gegebenen Kreis in zwei reellen und von einander verschiedenen, in zwei reellen und zusammenfallenden Punkten, oder gar nicht schneidet, je nachdem  $r \gtrless \delta$  d. h. je nachdem der Abstand der Geraden vom Mittelpunkte des Kreises kleiner, gleich oder größer ist als der Radius.

Nehmen wir an, die Schnittpunkte seien reell — wir wollen sie mit  $S_1$  und  $S_2$ , ihre Koordinaten mit  $x_1, y_1$  und  $x_2, y_2$  bezeichnen —, dann erhalten wir aus (3), ohne aufzulösen, die Abscisse  $\frac{x_1 + x_2}{2}$  des Mittelpunktes der Sehne  $S_1 S_2$ , nämlich:

$$(5) \quad x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \delta \cos \alpha.$$

Führt man diesen Wert in (2) ein, so findet man die zugehörige Ordinate:

$$(6) \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \delta \sin \alpha.$$

Aus diesen Gleichungen für  $x$  und  $y$  aber folgt:

$$(7) \quad y = x \operatorname{tg} \alpha,$$

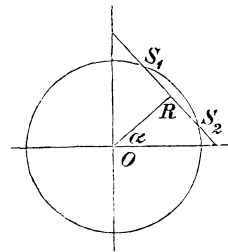
d. h. der Mittelpunkt der Sehne  $S_1 S_2$  liegt auf dem Lote, welches man vom Kreismittelpunkte aus auf die Sehne fällen kann. Da nun zu parallelen Sehnen dasselbe Lot gehört, so ergibt sich:

Die Mittelpunkte paralleler Sehnen liegen auf dem Lote, welches man vom Kreismittelpunkte aus auf diese Sehnen fällen kann.

Aufg. 1. Bestimme die Lage der Geraden:

$$2x - 7y + 1 = 0$$

Fig. 29.



zu dem Kreise  $x^2 + y^2 = 9$  und eventuell die Koordinaten der Schnittpunkte.

Aufg. 2. Bestimme aus den Gleichungen  $x = \delta \cos \alpha$ ,  $y = \delta \sin \alpha$  den Ort der Mittelpunkte aller Sehnen, welche vom Kreismittelpunkte den konstanten Abstand  $\delta$  besitzen. (Betrachte  $\alpha$  als einen zu eliminierenden Parameter, § 29.)

Aufg. 3. Leite die sämtlichen Resultate des Textes ab für den Kreis  $ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0$  und die Gerade  $Ax + By + C = 0$ .

Aufg. 4. Bestimme die Lage der Geraden:

$$5y - x + 2 = 0$$

in Bezug auf den Kreis  $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 9$  und eventuell die Koordinaten der Schnittpunkte.

#### § 34. Die Tangente in einem Punkte des Kreises.

Im vorhergehenden Paragraphen haben wir gesehen, daß die quadratische Gleichung, welche die Abscissen der Schnittpunkte der Geraden  $x \cos \alpha + y \sin \alpha - \delta = 0$  mit dem Kreise  $x^2 + y^2 = r^2$  bestimmt, zwei zusammenfallende Wurzeln besitzt, sobald der Abstand  $\delta$  des Kreismittelpunktes  $O$  von der Geraden gleich dem Radius  $r$  wird. Die Gerade steht in diesem Falle im Endpunkte des entsprechenden Radius  $\delta = r$  senkrecht auf diesem und wird dann bekanntlich eine Tangente des Kreises genannt. Um aber eine für alle Kurven gültige Definition der Tangente zu erhalten, gehen wir von folgender Überlegung aus. Durch einen beliebigen Punkt  $P_1$  des Kreises werde eine Sekante gezogen, welche den Kreis noch in einem zweiten Punkte  $P_2$  trifft. Nunmehr möge sich die Sekante um den Punkt  $P_1$  in dem Sinne drehen, daß der zweite Schnittpunkt  $P_2$  immer mehr und mehr sich dem Punkte  $P_1$  nähert. In demselben Momente, in welchem die Gerade mit dem Radius  $OP_1$  einen rechten Winkel einschließt, d. h. zur Tangente wird, fällt der Punkt  $P_2$  mit  $P_1$  zusammen, und umgekehrt.

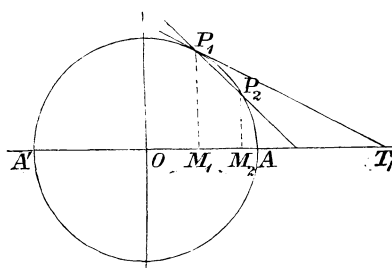
Sei daher jetzt eine beliebige Kurve gegeben und auf derselben ein Punkt  $P_1$ . Durch diesen werde eine Sekante gezogen, welche die Kurve noch in einem zweiten Punkte  $P_2$  treffen möge.

Dreht sich nun die Sekante um  $P_1$  in dem Sinne, daß sich  $P_2$  immer mehr dem Punkte  $P_1$  nähert, so nennt man die Gerade in dem Momente, in welchem  $P_2$  mit  $P_1$  zusammengefallen ist, die Tangente der Kurve im Punkte  $P_1$ .

Diese Definition befindet sich also, auf den Kreis angewandt, wie wir oben gesehen haben, durchaus in Übereinstimmung mit der in den Elementen gegebenen Definition der Kreistangente. Zugleich ist damit genau der Weg vorgezeichnet, den man einschlagen muß, um für einen beliebigen Punkt  $P_1$  des Kreises oder überhaupt einer Kurve die Gleichung der Tangente zu erhalten.

Die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  des Kreises  $x^2 + y^2 = r^2$  mögen

Fig. 30.



durch ihre Koordinaten  $x_1, y_1$ , resp.  $x_2, y_2$  gegeben sein. Die Gleichung der Sekante  $P_1P_2$  lautet dann (§ 19):

$$(1) \quad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1).$$

Da aber  $P_1$  und  $P_2$  auf dem Kreise liegen, so ist:

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2, \quad x_2^2 + y_2^2 = r^2,$$

und folglich:

$$x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 = 0,$$

oder:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = - \frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1},$$

wodurch Gleichung (1) übergeht in:

$$(2) \quad y - y_1 = - \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} (x - x_1).$$

Um nun von der Gleichung der Sekante zu der Gleichung der Tangente überzugehen, hat man  $P_2$  mit  $P_1$  zu-

sammenfallen zu lassen und demnach  $x_2 = x_1$ ,  $y_2 = y_1$  zu setzen. Man erhält:

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1),$$

oder:

$$xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2.$$

Da aber  $P_1$  auf dem Kreise liegt, also  $x_1^2 + y_1^2 = r^2$  ist, so erhält man als Gleichung der Tangente des Kreises  $x^2 + y^2 = r^2$  im Punkte  $P_1$ :

$$(3) \quad xx_1 + yy_1 = r^2.$$

In dieser Gleichung bedeuten  $x_1, y_1$  die Koordinaten des Berührungspunktes  $P_1$ , während  $x, y$ , die laufenden Koordinaten, einen beliebigen Punkt der Tangente darstellen.

Es möge jetzt der Mittelpunkt des Kreises nicht mit dem Anfangspunkte zusammenfallen, sondern die Koordinaten  $p, q$  besitzen, sodafs die Gleichung des Kreises:

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$$

lautet.

Um die Gleichung der Tangente im Punkte  $(x_1, y_1)$  zu erhalten, legen wir durch den Mittelpunkt ein neues Achsen-system parallel und gleichgerichtet mit dem alten. Die neuen Koordinaten derjenigen Punkte, deren alte Koordinaten  $x, y$ , resp.  $x_1, y_1$  sind, mögen  $x', y'$ , resp.  $x'_1, y'_1$  heißen. Die Gleichung der gesuchten Tangente, bezogen auf das neue System, lautet dann infolge (3):

$$x'x'_1 + y'y'_1 = r^2.$$

Da aber:

$$x' = x - p, \quad y' = y - q, \quad x'_1 = x_1 - p, \quad y'_1 = y_1 - q$$

ist, so findet man:

$$(4) \quad (x - p)(x_1 - p) + (y - q)(y_1 - q) = r^2$$

als die Gleichung der Tangente des Kreises:

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$$

im Punkte  $(x_1, y_1)$ .

Aufg. 1. Gegeben sei der Kreis  $x^2 + y^2 = 25$ . Zur Abscisse  $x = 4$  gehören zwei Kreispunkte; bestimme die Gleichungen der zugehörigen Tangenten und zeige, dafs diese sich in einem Punkte der  $x$ -Achse treffen.

Aufg. 2. Bringe die Gleichung  $xx_1 + yy_1 = r^2$  auf die Normalform und leite dieselbe (und damit auch die Gleichung  $xx_1 + yy_1 = r^2$ ) an der Hand der Figur direkt ab (§ 22).

Aufg. 3. Bestimme den Richtungskoeffizienten der Kreistangente  $xx_1 + yy_1 = r^2$  und zeige, daß die Tangente auf dem Radius des Berührungspunktes senkrecht steht.

Aufg. 4. Der Kreis  $x^2 + y^2 = r^2$  treffe die  $x$ -Achse in den Punkten  $A$  und  $A'$ . Bestimme den Achsenabschnitt  $x = OT_1$  der Tangente des Punktes  $P_1$ , dessen Abscisse  $x_1 = OM_1$  ist, und schliesse aus der Relation  $xx_1 = r^2 = OA^2$ , daß  $A, A', M_1, T_1$  harmonische Punkte sind (§ 4). Wie bewegt sich  $T_1$ , wenn  $M_1$  die Strecke  $AA'$  durchläuft?

Aufg. 5. Unter welcher Bedingung ist die Gerade:

$$Ax + By + C = 0$$

eine Tangente des Kreises  $x^2 + y^2 = r^2$ ? Zeige, daß für die Gerade  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$  diese Bedingung lautet:  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{r^2}$ .

Aufg. 6. Welche Beziehung muß zwischen  $p, q, r, A, B, C$  stattfinden, damit die Gerade  $Ax + By + C = 0$  den Kreis  $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$  berühre?

Aufg. 7. Bestimme mit Hilfe dieser Beziehung die Gleichung des Kreises, der dem Dreiecke:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

$$A_3x + B_3y + C_3 = 0$$

eingeschrieben ist.

Aufg. 8. Unter welcher Bedingung berührt die Gerade  $Ax + By + C = 0$  den Kreis  $ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0$ ?

### § 35. Tangenten von einem Punkte außerhalb des Kreises. Berührungssehne, Pol und Polare.

Von einem beliebigen Punkte  $(x_0, y_0)$  aus werde an den Kreis  $x^2 + y^2 = r^2$  eine Tangente gelegt. Bezeichnet man die Koordinaten des Berührungspunktes mit  $x_1, y_1$ , so lautet die Gleichung der Tangente:

$$xx_1 + yy_1 = r^2,$$

und da dieselbe durch  $(x_0, y_0)$  hindurchgehen soll, so hat man:

$$(1) \quad x_0 x_1 + y_0 y_1 = r^2.$$

Daraus folgt aber, daß der Berührungspunkt  $(x_1, y_1)$  einer von dem Punkte  $(x_0, y_0)$  an den Kreis gezogenen Tangente auf der Geraden:

$$(2) \quad x x_0 + y y_0 = r^2$$

liegen muß.

Diese Gerade trifft den Kreis  $x^2 + y^2 = r^2$  in zwei Punkten (§ 33), und es ist jetzt umgekehrt leicht einzusehen, daß die Tangente in jedem dieser beiden Punkte durch  $(x_0, y_0)$  hindurchgeht. Denn bezeichnet man einen dieser Punkte mit  $x', y'$ , so ist  $x' x_0 + y' y_0 = r^2$ . Diese Gleichung läßt sich aber auch so deuten, daß sie aussagt, der Punkt  $(x_0, y_0)$  liege auf der zu  $(x', y')$  gehörigen Tangente  $xx' + yy' = r^2$ .

Zu jedem Punkte  $(x_0, y_0)$  der Ebene ergibt sich daher eine ganz bestimmte zugehörige Gerade:

$$x x_0 + y y_0 = r^2.$$

Sie wird die Polare des Punktes  $(x_0, y_0)$  in Bezug auf den gegebenen Kreis, und umgekehrt der Punkt  $(x_0, y_0)$  der Pol der Geraden:

$$x x_0 + y y_0 = r^2$$

genannt. Die Polare des Punktes  $(x_0, y_0)$  schneidet nach dem Obigen aus dem Kreise die Berührungspunkte der von  $(x_0, y_0)$  an den Kreis konstruierbaren Tangenten aus und heißt daher auch die Berührungssehne des Punktes  $(x_0, y_0)$ . Da der Abstand dieser Polaren vom Mittelpunkte gleich  $\frac{r^2}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$  ist (§ 22), so erhält man zwei reelle und von einander verschiedene, zwei reelle aber zusammenfallende, oder gar keine Schnittpunkte, je nachdem  $(x_0, y_0)$  außerhalb, auf dem Umfange, oder innerhalb des Kreises liegt. Im ersten Falle kann man daher von  $(x_0, y_0)$  aus zwei von einander verschiedene Tangenten an den Kreis legen, im zweiten Falle erhält man eine einzige, mit der Berührungssehne zusammenfallende Tangente, im dritten Falle gar keine reellen Tangenten.

Aufg. 1. Die Berührungspunkte der Tangenten zu finden, die man von  $(5, -3)$  an den Kreis  $x^2 + y^2 = 16$  legen kann.

Aufg. 2. Finde durch Vergleichen mit  $xx_0 + yy_0 = r^2$  den Pol der Geraden  $Ax + By + C = 0$  in Bezug auf:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Aufg. 3. Bestimme die Polare des Punktes  $(x_0, y_0)$  und den Pol der Geraden  $Ax + By + C = 0$  in Bezug auf den Kreis  $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ .

Aufg. 4. Löse dieselbe Aufgabe für den Kreis  $ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0$ .

§ 36. Die Potenz eines Punktes in Bezug auf einen Kreis.

Zieht man durch einen beliebigen Punkt  $P_1$ , mit den Koordinaten  $x_1, y_1$ , eine unter dem Winkel  $\varphi$  gegen die  $x$ -Achse geneigte Gerade, so kann man die Koordinaten  $x, y$  eines jeden Punktes  $P$  der Geraden durch:

(1)  $x = x_1 + \varrho \cos \varphi, y = y_1 + \varrho \sin \varphi$  ausdrücken, insofern  $P_1P = \varrho$  gesetzt wird. Denn man hat:

$$\cos \varphi = \frac{x - x_1}{\varrho}, \sin \varphi = \frac{y - y_1}{\varrho} \quad (\S 7 \text{ u. } 8).$$

Indem man dem Parameter  $\varrho$  alle Werte von  $-\infty$  bis  $+\infty$  beilegt, erhält man aus (1) alle Punkte der unendlichen Geraden.

Sei jetzt ein beliebiger Kreis mit dem Radius  $r$  und ein beliebiger Punkt  $P_1$  gegeben. Der Einfachheit halber wählen wir den Mittelpunkt des Kreises zum Anfangspunkte, sodafs die Kreisgleichung  $x^2 + y^2 = r^2$  lautet.

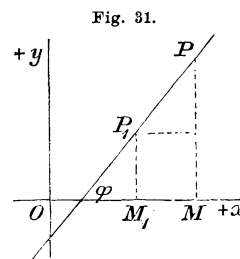
Durch  $P_1$  werde unter dem Winkel  $\varphi$  eine Gerade gezogen, deren Punkte durch (1) bestimmt sind. Soll nun ein beliebiger Punkt  $P$  dieser Geraden zugleich auf dem Kreise liegen, so mufs sein:

$$(x_1 + \varrho \cos \varphi)^2 + (y_1 + \varrho \sin \varphi)^2 = r^2,$$

oder:

$$(2) \quad \varrho^2 + 2\varrho(x_1 \cos \varphi + y_1 \sin \varphi) + x_1^2 + y_1^2 - r^2 = 0.$$

Diese in  $\varrho$  quadratische Gleichung liefert die beiden Schnittpunkte der Geraden mit dem Kreise (§ 33).





Da aber das Produkt der beiden Wurzeln, nämlich:

$$(3) \quad \varphi' \varphi'' = x_1^2 + y_1^2 - r^2,$$

nur von der Lage des Punktes  $P_1$ , nicht aber von der durch  $\varphi$  bestimmten Richtung der durch  $P_1$  gehenden Geraden abhängig ist, so folgt:

Zieht man von einem beliebigen Punkte Strahlen nach einem Kreise, von denen jeder den Kreis in zwei zusammengehörigen Punkten trifft, so ist das Produkt der Entfernungen zweier zusammengehöriger Schnittpunkte von dem gegebenen Punkte für alle Strahlen konstant.

Dieses konstante Produkt wird die Potenz des Punktes  $P_1$  in Bezug auf den gegebenen Kreis genannt. Der Ausdruck  $x_1^2 + y_1^2 - r^2$  zeigt, daß die Potenz für einen Punkt außerhalb des Kreises positiv, für einen Punkt auf dem Kreise Null, für einen Punkt innerhalb des Kreises negativ ist.

Dreht man, unter der Voraussetzung, daß  $P_1$  außerhalb des Kreises liegt, den durch  $P_1$  gehenden Strahl, bis er den Kreis berührt, so ergibt sich, daß die Potenz von  $P_1$  gleich dem Quadrate der durch  $P_1$  gehenden Tangente ist.

Aufg. 1. Man überzeuge sich, daß die auf die Potenz bezüglichen Untersuchungen selbständig, also unabhängig von dem nur zur Ableitung eingeführten Koordinatensysteme existieren.

Aufg. 2. Welches ist der Ort der Punkte, die in Bezug auf einen gegebenen Kreis dieselbe Potenz haben?

Aufg. 3. Welche Werte nimmt die Potenz eines Punktes an, welcher eine durch den Mittelpunkt des Kreises gehende unendliche Gerade durchläuft?

### § 37. Systeme von Kreisen. Potenzlinie.

So lange wir es nur mit einem Kreise zu thun haben, können wir der Einfachheit halber den Mittelpunkt als Anfangspunkt der Koordinaten betrachten und erhalten dann als Potenz des Punktes  $(x_1, y_1)$  den Ausdruck  $x_1^2 + y_1^2 - r^2$ .

Hat aber der Mittelpunkt die Koordinaten  $p, q$ , so lehrt

eine einfache Parallelverschiebung der Achsen, daß die Potenz des Punktes  $(x_1, y_1)$  in Bezug auf den Kreis:

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 - r^2 = 0$$

gleich:

$$(x_1 - p)^2 + (y_1 - q)^2 - r^2$$

ist.

Dies vorausgeschickt, seien jetzt:

$$(1) \quad (x - p_1)^2 + (y - q_1)^2 - r_1^2 = 0,$$

$$(2) \quad (x - p_2)^2 + (y - q_2)^2 - r_2^2 = 0$$

die Gleichungen zweier Kreise. Versteht man unter  $(x, y)$  einen ganz beliebigen Punkt, so stellt sich die linke Seite z. B. der Gleichung (1) als die Potenz des Punktes  $(x, y)$  in Bezug auf den ersten Kreis dar, ist also positiv, wenn  $(x, y)$  außerhalb, Null, wenn  $(x, y)$  auf der Peripherie, und negativ, wenn  $(x, y)$  innerhalb des ersten Kreises liegt. Analoges gilt für den zweiten Kreis. Bezeichnen wir daher zur Abkürzung die linken Seiten von (1) und (2) mit  $K_1$  und  $K_2$ , so bedeuten  $K_1$  und  $K_2$  die Potenzen von  $(x, y)$  in Bezug auf die beiden Kreise. Soll der Punkt  $(x, y)$  so liegen, daß diese beiden Potenzen einander gleich sind, so hat man nur  $K_1 = K_2$  oder  $K_1 - K_2 = 0$  zu setzen. Rechnet man aber aus, so fallen  $x^2$  und  $y^2$  weg, und man erhält:

$$(3) \quad 2x(p_2 - p_1) + 2y(q_2 - q_1) + p_1^2 + q_1^2 - r_1^2 - (p_2^2 + q_2^2 - r_2^2) = 0$$

als Gleichung des Ortes der Punkte, welche in Bezug auf die Kreise  $K_1 = 0$  und  $K_2 = 0$  gleiche Potenzen haben.

Diese Gleichung stellt aber, weil in Bezug auf  $x$  und  $y$  linear, eine gerade Linie dar. Man nennt sie die Potenzlinie (Chordale, Radikalachse) der beiden Kreise.

Wir ziehen es vor, für die Gleichung der Potenzlinie die Form  $K_1 - K_2 = 0$  beizubehalten, und erkennen daraus unmittelbar, daß ein Punkt  $(x, y)$ , welcher beiden Kreisen gemeinschaftlich ist, auch auf der Potenzlinie liegen muß, da ja für einen solchen die Ausdrücke  $K_1$  und  $K_2$  einzeln verschwinden. Aus dem gleichen Grunde muß jeder Schnittpunkt der Potenzlinie mit dem einen Kreise auch auf dem andern Kreise liegen. Denn wenn für einen Punkt  $(x, y)$

zugleich  $K_1 - K_2$  und etwa  $K_1$  verschwinden, so muß für denselben Punkt auch  $K_2$  gleich Null sein. Man erhält daher die Schnittpunkte zweier Kreise als die Schnittpunkte der Potenzlinie mit dem einen von ihnen. Zwei Kreise schneiden sich demnach entweder in zwei reellen und von einander verschiedenen Punkten — dann ist die Potenzlinie die gemeinschaftliche Sekante —, oder in zwei reellen, aber zusammenfallenden Punkten, d. h. sie berühren sich — dann ist die Potenzlinie die gemeinschaftliche Tangente —, oder endlich sie schneiden sich gar nicht — dann hat auch die Potenzlinie mit keinem der Kreise einen Punkt gemein.

Aus der Gleichung (3) der Potenzlinie erkennt man, daß dieselbe auf der Verbindungslinie:

$$x(q_2 - q_1) - y(p_2 - p_1) + p_2 q_1 - p_1 q_2 = 0$$

der beiden Kreismittelpunkte senkrecht steht (§ 24), wie auch aus Symmetriegründen evident ist.

Berücksichtigt man endlich, daß für einen außerhalb eines Kreises befindlichen Punkt die Potenz gleich dem Quadrate der durch den Punkt gehenden Kreistangente ist, so folgt:

I. Der Ort der Punkte, von denen aus man an zwei gegebene Kreise gleiche Tangenten legen kann, ist eine Gerade, nämlich die Potenzlinie der beiden Kreise.

Wir kombinieren jetzt mit den beiden Kreisen (1) und (2) einen dritten Kreis, dessen Gleichung:

$$(4) \quad (x - p_3)^2 + (y - q_3)^2 - r_3^2 = 0,$$

oder abgekürzt  $K_3 = 0$  sei.

Diese drei Kreise, zu je zweien kombiniert, geben zu drei Potenzlinien Veranlassung, deren Gleichungen wir abgekürzt schreiben:

$$K_2 - K_3 = 0,$$

$$K_3 - K_1 = 0,$$

$$K_1 - K_2 = 0.$$

Da aber durch Addition der Gleichungen die linke Seite identisch verschwindet, so folgt (§ 25):

II. Die drei Potenzlinien, die man zu je zweien von drei Kreisen konstruieren kann, schneiden sich in einem Punkte, den man den Potenzpunkt (Chordalpunkt, Radikalzentrum) der drei Kreise nennt.

Aufg. 1. Was wird aus Gleichung (3) der Potenzlinie zweier Kreise, wenn diese konzentrisch sind oder wenn der eine sich auf einen beliebigen Punkt reduziert?

Aufg. 2. Wenn zwei Kreise sich rechtwinklig schneiden, so ist die von dem Mittelpunkte eines jeden der beiden Kreise an den andern gelegte Tangente gleich dem zugehörigen Radius. Unter welcher Bedingung durchschneiden sich demnach zwei durch ihre Gleichungen gegebene Kreise rechtwinklig?

Aufg. 3. Wie heisst die Gleichung des Kreises, dessen Mittelpunkt  $(3, -4)$  ist und welcher den Kreis:

$$(x - 5)^2 + (y - 6)^2 = 9$$

rechtwinklig schneidet? Konstruiere den Kreis.

Aufg. 4. Finde die Schnittpunkte der beiden vorhergehenden Kreise mit Hülfe der Potenzlinie.

Aufg. 5. Die Kreise  $K_1$  und  $K_2$  mögen keinen Punkt mit einander gemein haben. Konstruiere ihre Potenzlinie mit Hülfe eines Kreises  $K_3$ , welcher  $K_1$  und  $K_2$  schneidet, durch Anwendung des Satzes II.

Aufg. 6. Welche Beziehung muß zwischen  $p_1, q_1, r_1; p_2, q_2, r_2$  stattfinden, damit die beiden zugehörigen Kreise sich berühren?

Aufg. 7. Stelle die Gleichungen auf, aus denen man die Koordinaten des Mittelpunktes und den Radius eines Kreises zu berechnen hat, welcher durch zwei gegebene Punkte  $(x_1, y_1); (x_2, y_2)$  hindurchgeht und den Kreis:

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$$

berührt. Ohne die Gleichungen aufzulösen, überzeuge man sich, daß zwei Lösungen existieren.

Aufg. 8. Man löse die vorhergehende Aufgabe durch Konstruktion, indem man durch die gegebenen Punkte  $P_1$  und  $P_2$  einen Kreis legt, welcher den gegebenen Kreis in zwei Punkten schneidet. Die Verbindungslinie dieser beiden Punkte, sowie die Linie  $P_1P_2$  sind die Potenzlinien, welche der

Hilfskreis mit dem gegebenen und dem gesuchten Kreise bestimmt. Die von dem Schnittpunkte dieser Potenzlinien an den gegebenen Kreis gelegten Tangenten führen dann zu den beiden Lösungen der Aufgabe.

Aufg. 9. Beweise, daß der Ort des Punktes, dessen Potenzen in Bezug auf zwei Kreise  $K_1 = 0$  und  $K_2 = 0$  in dem konstanten Verhältnis  $\lambda:1$  zu einander stehen, der Kreis  $K_1 - \lambda K_2$  ist, der durch die Schnittpunkte von  $K_1$  und  $K_2$  geht. Für  $\lambda = 1$  erhält man welchen Spezialfall?

Aufg. 10. Bestimme die Koordinaten des Mittelpunktes des Kreises  $K_1 - \lambda K_2 = 0$  und diskutiere das Resultat.

Aufg. 11. Aus Aufg. 2 ergibt sich, daß die Bedingung dafür, daß die beiden Kreise:

$$x^2 + y^2 + bx + cy + d = 0$$

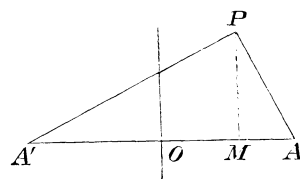
$$\text{und} \quad x^2 + y^2 + b_1x + c_1y + d_1 = 0$$

sich rechtwinklig schneiden,  $bb_1 + cc_1 = 2(d + d_1)$  lautet. Man kann daher stets einen Kreis konstruieren, der drei gegebene Kreise rechtwinklig schneidet. Bestimme seine Gleichung und zeige, daß sein Mittelpunkt das Radikalzentrum der drei gegebenen Kreise ist.

### § 38. Vermischte Aufgaben über den Kreis.

Aufg. 1. Den Ort der Punkte zu finden, für welche die Summe der Quadrate der Abstände von zwei festen Punkten konstant ist.

Fig. 32.



Die Verbindungslinie der gegebenen Punkte  $A$  und  $A'$ , deren Entfernung  $= 2c$  sei, werde zur  $x$ -Achse, ihre Mitte zum Anfangspunkte gewählt. Die Entfernungen des Punktes  $P$ , dessen Ort zu suchen ist, seien  $r$  und  $r'$ , und es sei ferner  $r^2 + r'^2 = d^2$ . Nun folgt aus:

$$r^2 = (c - x)^2 + y^2 \quad \text{und} \quad r'^2 = (c + x)^2 + y^2$$

die Gleichung:

$$r^2 + r'^2 = 2c^2 + 2x^2 + 2y^2 = d^2,$$

d. h.:

$$x^2 + y^2 = \frac{d^2}{2} - c^2.$$

Der Ort ist also, so lange  $d^2 > 2c^2$  ist, ein Kreis mit  $O$  als Mittelpunkt.

Aufg. 2. Den Ort des Punktes zu finden, für welchen das Verhältnis der Abstände von zwei festen Punkten konstant ist.

Wir wählen die Verbindungslinie der gegebenen Punkte  $A$  und  $B$ , deren Entfernung  $= c$  sei, zur  $x$ -Achse und  $A$  zum Anfangspunkte. Ist dann  $\frac{PA}{PB} = \kappa$ , so folgt aus:

$$PA^2 = x^2 + y^2, \quad PB^2 = (c - x)^2 + y^2$$

die Gleichung:

$$\frac{x^2 + y^2}{(c - x)^2 + y^2} = \kappa^2,$$

$$\text{oder: } x^2(1 - \kappa^2) + y^2(1 - \kappa^2) + 2c\kappa^2 x - c^2\kappa^2 = 0.$$

Dies ist aber die Gleichung eines Kreises. Bestimme den Mittelpunkt und den Radius desselben. Zeige, daß der Kreis die  $x$ -Achse in zwei Punkten trifft, welche die Strecke  $AB$  harmonisch teilen (§ 4, Aufg. 4).

Aufg. 3. Von einem Dreiecke kennt man die Basis  $AB = c$  und den gegenüberliegenden Winkel  $\gamma$ . Man suche den Ort der Spitze  $C$  des Dreiecks.

Bezeichnet man die Winkel bei  $A$  und  $B$  resp. mit  $\alpha$  und  $\beta$  und wählt die Mitte von  $AB$  zum Anfangspunkte,  $AB$  selbst zur  $x$ -Achse, so erhält man, unter  $x, y$  die Koordinaten der Spitze  $C$  verstanden, die Gleichungen:

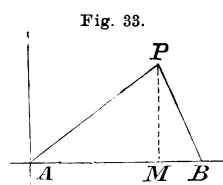
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{\frac{c}{2} + x}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{y}{\frac{c}{2} - x}, \quad \operatorname{tg} \gamma = -\operatorname{tg} (\alpha + \beta).$$

Setzt man aber in  $\operatorname{tg} \gamma = -\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$  die Werte von  $\operatorname{tg} \alpha$  und  $\operatorname{tg} \beta$  ein, so erhält man nach leichter Reduktion:

$$x^2 + y^2 - c \cdot \operatorname{ctg} \gamma \cdot y - \frac{c^2}{4} = 0$$

als Gleichung eines durch  $A$  und  $B$  gehenden Kreises. Bestimme den Mittelpunkt und den Radius desselben und zeige

6\*



die Übereinstimmung mit der bekannten planimetrischen Lösung der Aufgabe.

Aufg. 4. Von einem Dreiecke kennt man die Basis  $AB=c$  und den gegenüberliegenden Winkel  $\gamma$ . Man suche den Ort des Schnittpunktes der drei Höhen.

Behält man die Dispositionen und Bezeichnungen der vorhergehenden Aufgabe bei und nennt die Winkel, welche die zu  $A$  und  $B$  gehörigen Höhen mit  $AB$  einschließen, resp.  $\alpha'$  und  $\beta'$ , so findet man leicht  $\alpha' + \beta' = \gamma$  und sodann, wie früher:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{y}{\frac{c}{2} + x}, \quad \operatorname{tg} \beta' = \frac{y}{\frac{c}{2} - x}.$$

Daraus ergibt sich aber durch fast die gleiche Rechnung:

$$x^2 + y^2 + c \cdot \operatorname{ctg} \gamma \cdot y - \frac{c^2}{4} = 0,$$

d. h. der gesuchte Ort ist der Kreis, welcher zu dem in Aufg. 3 gefundenen Kreise in Bezug auf  $AB$  symmetrisch liegt.

Aufg. 5. Von einem beliebigen Punkte  $P_0$  mit den gegebenen Koordinaten  $x_0, y_0$  werden Strahlen nach allen Punkten  $P$  des Kreises  $x^2 + y^2 = r^2$  gezogen, und jedesmal werde die Strecke  $P_0P$  durch einen Punkt  $R$  in dem konstanten Teilverhältnis  $\frac{P_0R}{RP} = \lambda$  geteilt. Welches ist der Ort der Teilpunkte  $R$ ?

Bezeichnet man mit  $\alpha$  die Anomalie eines beliebigen Kreispunktes  $P$ , so sind seine Koordinaten  $r \cos \alpha$ ,  $r \sin \alpha$ , und demnach die Koordinaten von  $R$  (§ 9) gleich:

$$x = \frac{x_0 + \lambda r \cos \alpha}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_0 + \lambda r \sin \alpha}{1 + \lambda}.$$

Um die Gleichung des Ortes zu erhalten, eliminieren wir den Parameter  $\alpha$  (§ 29), indem wir nach  $\cos \alpha$ , resp.  $\sin \alpha$  auflösen. Durch Quadrieren und Addieren der Gleichungen:

$$\cos \alpha = \frac{(1 + \lambda)x - x_0}{\lambda r}, \quad \sin \alpha = \frac{(1 + \lambda)y - y_0}{\lambda r}$$

folgt aber:

$$\left(x - \frac{x_0}{1 + \lambda}\right)^2 + \left(y - \frac{y_0}{1 + \lambda}\right)^2 = \frac{\lambda^2 r^2}{(1 + \lambda)^2}.$$

In welcher Beziehung steht dieser Kreis nach Lage und Dimension zu dem gegebenen?

## Viertes Kapitel.

## Die Ellipse.

## § 39. Definition und Gleichung.

Die Ellipse ist der Ort aller Punkte, für welche die Summe der Abstände von zwei festen Punkten konstant ist.

Die beiden festen Punkte  $F$  und  $F'$  nennt man die Brennpunkte, ihren halben Abstand die Exzentrizität der Ellipse. Die von irgend einem Punkte  $P$  der Ellipse nach den Brennpunkten gezogenen Strahlen heißen Brennstrahlen.

Aus der Definition ergibt sich die folgende mechanische Erzeugungsweise der Ellipse. Befestigt man in den beiden Brennpunkten  $F$  und  $F'$  die Enden eines Fadens, dessen Länge größer als  $FF'$  ist, und führt einen Stift so, daß er den Faden fortwährend gespannt erhält, so beschreibt dieser Stift eine Ellipse. Aus dieser Entstehungsweise erkennt man, wie auch aus der Definition, daß die Ellipse eine geschlossene Linie ist. Um ihre Gleichung abzuleiten, wählen wir  $FF'$  als  $x$ -Achse und den Mittelpunkt von  $FF'$  als Anfangspunkt eines rechtwinkligen Achsensystems. Es sei:

$$FF' = 2c, \quad PF = r, \quad PF' = r',$$

und die konstante Summe der beiden Brennstrahlen  $r$  und  $r'$  gleich  $2a$ . Dann muß  $r + r' > 2c$ , folglich  $a > c$  sein. Nun ist:

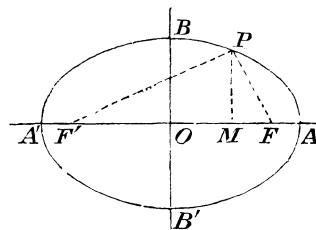
$$r = \sqrt{(c-x)^2 + y^2}, \quad r' = \sqrt{(c+x)^2 + y^2};$$

man erhält daher als Gleichung der Ellipse:

$$(1) \quad \sqrt{(c-x)^2 + y^2} + \sqrt{(c+x)^2 + y^2} = 2a.$$

Um dieselbe von den Wurzeln zu befreien, quadriere man, woraus sich ergibt:

Fig. 34.





$$2(x^2 + y^2 + c^2) + 2\sqrt{(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2} = 4a^2$$

und durch nochmaliges Quadrieren:

$$(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2 = ((x^2 + y^2 + c^2) - 2a^2)^2.$$

Durch Ausrechnen folgt:

$$x^2(a^2 - c^2) + y^2a^2 - a^2(a^2 - c^2) = 0.$$

Da  $a > c$  ist, so kann man zur Abkürzung:

$$(2) \quad a^2 - c^2 = b^2$$

setzen und erhält dann, nach Division mit  $a^2b^2$ , die Gleichung:

$$(3) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Dieser Gleichung genügen alle Punkte, für welche:

$$r + r' = 2a$$

ist, d. h. alle Punkte der Ellipse. Daß aber auch nur diese Punkte die Gleichung (3) befriedigen, erkennt man so:

Verbindet man einen beliebigen Punkt  $Q$  der Ebene mit dem Anfangspunkte  $O$ , so muß der Strahl  $OQ$  die Ellipse, da dieselbe eine geschlossene Kurve ist, in einem Punkte  $P$  schneiden.

Die Koordinaten von  $Q$  seien  $x_0, y_0$ , die von  $P$  mögen  $x, y$  heißen. Dann ist  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Liegt nun  $Q$  näher bei  $O$  als  $P$ , so hat man  $x_0 < x, y_0 < y$ , folglich  $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} < 1$ . Liegt dagegen  $Q$  auf der Verlängerung von  $P$ , d. h. ist  $x_0 > x, y_0 > y$ , so folgt:  $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} > 1$ . Gleichung (3) wird daher allemal, aber auch nur dann, erfüllt, wenn  $(x, y)$  einen Punkt der Ellipse bedeutet, also ist (3) die Gleichung der Ellipse.

#### § 40. Diskussion der Gleichung der Ellipse.

Sei  $(x, y)$  ein Punkt der Ellipse, also:

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Da diese Gleichung nur die Quadrate von  $x$  und  $y$  enthält, so wird sie auch von den Koordinaten des Punktes  $(-x, -y)$

befriedigt. Die Verbindungslinie von  $(x, y)$  und  $(-x, -y)$  geht durch den Anfangspunkt und wird in ihm halbiert.

Um umgekehrt die Schnittpunkte einer beliebigen, durch  $O$  gehenden Geraden  $y = \mu x$  mit der Ellipse zu bestimmen, hat man nur in (1)  $\mu x$  an die Stelle von  $y$  zu setzen und nach  $x$  aufzulösen. Man erhält die entgegengesetzt gleichen Abscissen  $x = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 + a^2\mu^2}}$  der beiden Schnittpunkte, deren Ordinaten demnach  $y = \pm \frac{\mu ab}{\sqrt{b^2 + a^2\mu^2}}$  sind, d. h. die beiden Schnittpunkte sind symmetrisch zu  $O$  gelegen.

$O$  heisst daher der Mittelpunkt der Ellipse, jede durch ihn hindurchgehende Sehne ein Durchmesser.

Die Ellipse liegt aber auch symmetrisch zu den Koordinatenachsen, denn wenn  $(x, y)$  ein Punkt der Ellipse ist, so liegen auch die Punkte  $(-x, y)$  und  $(x, -y)$  auf derselben. Die Ellipse wird also durch die Achsen in vier kongruente Quadranten geteilt.

Aus der nach  $y$  aufgelösten Gleichung der Ellipse:

$$(2) \quad y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

erkennt man, dass  $y$  nur für Werte von  $x$  zwischen  $-a$  und  $+a$  reelle Werte besitzt. Für  $x = \pm a$  wird  $y = 0$ , für  $x = 0$  folgt  $y = \pm b$ . Die Ellipse schneidet somit die  $x$ -Achse in zwei Punkten  $A, A'$ , die Ordinatenachse in zwei Punkten  $B, B'$ , deren Entfernungen resp.  $AA' = 2a$ ,  $BB' = 2b$  sind.  $AA'$  nennt man die grosse,  $BB'$  die kleine Achse, beide zusammen die Hauptachsen und ihre Endpunkte die Scheitel der Ellipse.

Für  $x = c$  erhält man die beiden entgegengesetzt gleichen, zum Brennpunkte  $F$  gehörigen Ordinaten  $y = \pm \frac{b^2}{a}$ . Man schreibt zur Abkürzung:

$$(3) \quad \frac{b^2}{a} = p$$

und nennt  $p$  den Halbparameter der Ellipse.

Ist  $b = a$ , so ist  $c = 0$ . Die Ellipse geht dann, wie aus (1) oder (2) folgt, in einen Kreis mit dem Radius  $a$  über. Der Kreis ist also eine spezielle Ellipse, deren Brenn-

punkte im Mittelpunkte vereinigt und deren Hauptachsen einander gleich sind.

Aufg. 1. Verbinde die Scheitel  $B, B'$  der kleinen Achse mit den Brennpunkten  $F, F'$  und beweise, daß dadurch ein Rhombus entsteht, dessen Seiten gleich  $a$  sind.

Aufg. 2. Finde die Brennpunkte der Ellipse, deren Halbachsen  $a = 5, b = 3$  sind.

Aufg. 3. Wie groß ist die Exzentrizität  $e$  der Ellipse  $\frac{x^2}{26} + \frac{y^2}{19} = 1$ ?

Aufg. 4. Wie heißt die Gleichung der Ellipse, deren kleine Halbachse  $b = 3$  und deren Halbparameter  $p = 1$  ist?

Aufg. 5. Bestimme die Schnittpunkte der Ellipse:

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$$

mit den Winkelhalbierenden der Achsen.

Aufg. 6. Bestimme die Endpunkte der durch  $y = \mu x$  und  $y = -\mu x$  dargestellten Durchmesser der Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

und diskutiere das Resultat.

Aufg. 7. Untersuche, ob die Punkte  $(1; -3); (-4; 1); (3; 2, 4)$  innerhalb, auf oder außerhalb der durch  $a = 5, b = 3$  charakterisierten Ellipse liegen.

Aufg. 8. Bestimme die Halbachsen einer Ellipse, von welcher man die Brennpunkte und den Halbparameter kennt.

Aufg. 9. Berechne und konstruiere aus je zweien der vier Größen  $a, b, c, p$  die beiden andern. Zeige insbesondere, in welcher Weise  $b$  bei wachsendem  $a$  und gleichbleibendem  $p$  wächst.

#### § 41. Polargleichung der Ellipse, bezogen auf den Mittelpunkt.

Ein beliebiger Punkt  $P$  der Ellipse:

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

habe die rechtwinkligen Koordinaten  $x, y$  und die Polarkoordinaten  $r, u$ . Dann ist:

$$(2) \quad x = r \cos u, \quad y = r \sin u.$$

Führt man diese Werte in (1) ein, so kommt:

$$\frac{r^2 \cos^2 u}{a^2} + \frac{r^2 \sin^2 u}{b^2} = 1,$$

oder:

$$(3) \quad \frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2 u}{a^2} + \frac{\sin^2 u}{b^2}.$$

Dies ist die auf den Mittelpunkt bezogene Polargleichung der Ellipse. Sie läßt sich auch in der Form schreiben:

$$(4) \quad r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u}.$$

Berücksichtigt man  $\sin^2 u = 1 - \cos^2 u$  und ferner  $a^2 - b^2 = c^2$ , so erhält man hieraus:

$$(5) \quad r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 - c^2 \cos^2 u}.$$

Man bedient sich der Bezeichnung:

$$(6) \quad \frac{c}{a} = \varepsilon, \quad (\varepsilon < 1)$$

und nennt  $\varepsilon$  die numerische Exzentrizität, während  $c$ , im Gegensatze hierzu, auch die lineare Exzentrizität genannt wird. Mit Hülfe dieser neuen Bezeichnung geht (5) über in:

$$(7) \quad r^2 = \frac{b^2}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 u}.$$

Aus (5) erkennt man, daß  $r$  für  $u = 0$  seinen größten Wert, nämlich  $a$ , erhält. Durchläuft  $u$  den ersten Quadranten, so nimmt  $r$  stetig ab und erreicht für  $u = 90^\circ$  seinen kleinsten Wert, nämlich  $b$ .

Daraus ergibt sich, daß der um den Mittelpunkt  $O$  mit dem Radius  $a$  beschriebene Kreis, welcher die Ellipse in den Scheiteln  $A$  und  $A'$  der großen Achse berührt, der Ellipse umgeschrieben ist, während der konzentrische Kreis mit dem Radius  $b$ , welcher die Ellipse in den Scheiteln  $B$  und  $B'$  der kleinen Achse berührt, der Ellipse eingeschrieben ist.

Gleichung (3) führt noch zu einem bemerkenswerten Satze. Konstruiert man nämlich zu dem Halbmesser  $OP = r$  den dazu senkrechten  $OP' = r'$ , dessen Anomalie  $u' = 90^\circ + u$  ist, so hat man zunächst:

$$(8) \quad \frac{1}{r'^2} = \frac{\cos^2 u'}{a^2} + \frac{\sin^2 u'}{b^2}.$$

Da aber  $\cos u' = -\sin u$ ,  $\sin u' = \cos u$  ist, so erhält man durch Addition von (3) und (8):

$$(9) \quad \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2},$$

d. h.: Die Summe der reziproken Quadrate zweier auf einander senkrecht stehender Halbmesser ist konstant.

Aufg. 1. Bestimme die Länge der beiden Halbmesser, welche die Winkel der Achsen der Ellipse  $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1$  halbieren.

Aufg. 2. Bestimme für dieselbe Ellipse die Summe der reziproken Quadrate der zu den Geraden  $7x + 4y - 1 = 0$  und  $4x - 7y + 3 = 0$  parallelen Halbmesser und verifiziere Gleichung (9).

Aufg. 3. Berechne für dieselbe Ellipse die numerische Exzentrizität und gib die Polargleichung der Ellipse in den verschiedenen Formen an.

Aufg. 4. Beweise aus Gleichung (3), daß der Anfangspunkt jede durch ihn gehende Gerade halbiert, also der Mittelpunkt der Ellipse ist. Beweise ferner, daß zu den Achsen symmetrische Durchmesser einander gleich sind.

Aufg. 5. Es seien zwei Ellipsen  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  und  $\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$  gegeben, welche dieselbe numerische Exzentrizität  $\varepsilon$  besitzen. Beweise, daß nicht nur  $a : a_1 = b : b_1$  ist, sondern daß auch für je zwei Halbstrahlen  $r$  und  $r_1$ , die zu derselben Anomalie  $u$  gehören,  $r : r_1 = a : a_1$  ist. Die beiden Ellipsen sind ähnlich und ähnlich gelegen. Die Gleichheit der Exzentrizität zweier Ellipsen ist die notwendige und hinreichende Bedingung für ihre Ähnlichkeit.

Aufg. 6. Beweise die Gleichungen:

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}},$$

insofern  $p$  den Halbparameter bedeutet.

Aufg. 7. Drücke  $b$ ,  $c$ ,  $p$  durch  $a$  und  $\varepsilon$  aus.

Aufg. 8. Für die Bahn des Merkur ist  $\varepsilon = 0,2$ . Konstruiere eine Ellipse, welche der Merkurbahn ähnlich ist (Aufg. 5).

Aufg. 9. Die Entfernung der Erde von der Sonne in Sonnennähe verhält sich zu derjenigen in Sonnenferne wie 29:30. Berechne daraus das  $\varepsilon$  der Erdbahn.

Aufg. 10. Welchen Wert hat  $\varepsilon$ , wenn  $c = b$  ist?

Aufg. 11. Welchen Wert hat  $\varepsilon$  für den Kreis?

#### § 42. Konstruktion der Ellipse mittels des eingeschriebenen und des umgeschriebenen Kreises.

Konstruiert man zu der Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

oder:

$$(1) \quad y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

den umgeschriebenen Kreis, so lautet die Gleichung desselben:

$$(2) \quad y = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Bezeichnet man die zu derselben Abscisse  $OM = x$  gehörigen Ordinaten  $MP'$  und  $MP$  des umgeschriebenen Kreises und der Ellipse resp. mit  $y'$  und  $y$ , so folgt aus (1) und (2):

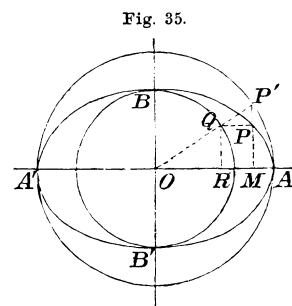
$$(3) \quad y = \frac{b}{a} y', \quad \text{d. h.}$$

Man erhält die Ellipse mit den Halbachsen  $a$  und  $b$ , indem man die Ordinaten des mit dem Radius  $a$  beschriebenen Kreises mit dem konstanten Verhältnis  $b:a$  multipliziert. Mit andern Worten:

Die Ellipse und der ihr umgeschriebene Kreis sind in Bezug auf die grofse Achse als Affinitätsachse zu einander affin und das Affinitätsverhältnis, welches von dem Kreise zu der Ellipse führt, ist gleich  $b:a$ .

Löst man die Gleichung der Ellipse und des ihr eingeschriebenen Kreises nach  $x$  auf, so ergibt sich in gleicher Weise:

Die Ellipse und der ihr eingeschriebene Kreis sind in Bezug auf die kleine Achse als Affinitätsachse zu einander affin und das Affinitätsverhältnis,



welches von dem Kreise zu der Ellipse führt, ist gleich  $a:b$ .

Um nun die Ellipse mit den Halbachsen  $a$  und  $b$  zu konstruieren, zeichne man die beiden konzentrischen Kreise mit den Radien  $a$  und  $b$  und ziehe durch den Mittelpunkt einen beliebigen Strahl  $OQP'$ . Zieht man dann durch den Schnittpunkt  $Q$  dieses Strahles mit dem kleineren Kreise eine Parallele zur  $x$ -Achse und durch den Schnittpunkt  $P'$  des Strahles mit dem größeren Kreise eine Parallele zur  $y$ -Achse, so ist der Schnittpunkt  $P$  der beiden Parallelen ein Punkt der Ellipse, denn man hat:

$$MP:MP' = RQ:MP' = OQ:OP',$$

d. h:

$$y:y' = b:a.$$

Aufg. Zeichne die Ellipse mit den Halbachsen  $a = 5$ ,  $b = 3$ .

#### § 43. Konjugierte Durchmesser.

Die in dem vorhergehenden Paragraphen besprochene Affinität zwischen der Ellipse und dem ihr umgeschriebenen, resp. eingeschriebenen Kreise liefert sofort zu jeder Eigenschaft des Kreises eine entsprechende der Ellipse. Bei dem Kreise liegen beispielsweise die Mittelpunkte paralleler Sehnen auf einem Durchmesser. Da nun einer Kreissehne  $P'Q'$  — wir wollen, um die Vorstellungen zu fixieren, fortan nur den umgeschriebenen Kreis ins Auge fassen, obwohl der eingeschriebene natürlich ganz die gleichen Dienste leistet, — in dem affinen Systeme wiederum eine geradlinige Strecke entspricht, deren Endpunkte  $P, Q$  die den Kreispunkten  $P', Q'$  entsprechenden Ellipsenpunkte sind, und welche sich daher als eine Ellipsensehne darstellt, so entsprechen den parallelen Kreissehnen parallele Ellipsensehnen und den Mittelpunkten der ersteren die Mittelpunkte der letzteren. Da aber jene auf einem Kreisdurchmesser liegen, so müssen diese die entsprechende geradlinige Strecke, d. h. einen Ellipsendurchmesser erfüllen (§ 27). Es gilt daher der Satz:

I. Die Mittelpunkte paralleler Sehnen einer Ellipse liegen auf einem Durchmesser.

Da ferner der Kreis in Bezug auf jedes der unendlich vielen Paare zu einander senkrecht stehender Durchmesser in dem Sinne symmetrisch ist, daß jeder der beiden Durchmesser eines solchen Paares die Sehnen halbiert, die dem andern parallel sind, so erhält man für die Ellipse durch zweimalige Anwendung von I den Satz:

II. Es giebt unendlich viele Paare von Durchmessern, in Bezug auf welche die Ellipse in dem Sinne symmetrisch ist, daß jeder der beiden Durchmesser eines solchen Paares die Sehnen halbiert, die dem andern parallel sind. Man erhält irgend eines dieser Paare, indem man zu einem beliebigen Paare auf einander senkrecht stehender Durchmesser des umgeschriebenen Kreises die entsprechenden Ellipsendurchmesser konstruiert.

Je zwei in dieser Weise zu einem Paare verbundene Durchmesser heißen konjugierte Durchmesser der Ellipse. Von zwei konjugierten Durchmessern kann man stets einen willkürlich wählen. Den andern erhält man dann, indem man zu dem ersten den entsprechenden Durchmesser des umgeschriebenen Kreises und zu dem auf diesem senkrecht stehenden Kreisdurchmesser wieder den entsprechenden Ellipsendurchmesser bestimmt, oder auch, indem man einfach den Mittelpunkt einer beliebigen zu dem gegebenen Durchmesser parallelen Sehne mit dem Mittelpunkte der Ellipse verbindet. Analytisch kann die gleiche Aufgabe dadurch gelöst werden, daß man aus dem Richtungskoeffizienten des gegebenen Durchmessers denjenigen des konjugierten zu bestimmen sucht. Zwischen den Richtungskoeffizienten zweier konjugierter Durchmesser besteht nämlich eine sehr einfache Relation. Bezeichnet man die Winkel, welche irgend zwei konjugierte Durchmesser mit der positiven  $x$ -Achse bilden, mit  $\alpha$  und  $\beta$ , so sind die Richtungskoeffizienten der beiden entsprechenden Kreisdurchmesser  $\frac{a}{b} \operatorname{tg} \alpha$  und  $\frac{a}{b} \operatorname{tg} \beta$  (§ 27). Da aber die letzteren auf einander senkrecht stehen, so ist:

$$\frac{a}{b} \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{a}{b} \operatorname{tg} \beta = -1, \quad \text{d. h.:}$$



$$(1) \quad \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = -\frac{b^2}{a^2}, \quad \text{oder:}$$

$$(2) \quad \frac{\cos \alpha \cos \beta}{a^2} + \frac{\sin \alpha \sin \beta}{b^2} = 0.$$

Wir erhalten also den Satz:

III. Das Produkt der Richtungskoeffizienten zweier konjugierter Durchmesser ist konstant.

Da  $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta$  stets negativ ist, so muß von den Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$  stets der eine ein spitzer, der andere ein stumpfer sein. Sei etwa  $\alpha$  der spitze Winkel. Wächst dann  $\alpha$ , so wächst auch  $\operatorname{tg} \alpha$  und es muß daher  $\operatorname{tg} \beta$ , absolut genommen, abnehmen, d. h. der Winkel  $\beta$  muß wachsen. Da ferner

$$\operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

mit Rücksicht auf Gl. (1) stets negativ ist, so muß  $\beta - \alpha$  allemal ein stumpfer Winkel sein. Diese Betrachtungen führen zu dem Satze:

IV. Konjugierte Durchmesser werden durch die Achsen getrennt. Durchläuft der eine, etwa im positiven Sinne, den ersten Quadranten, so durchläuft der andere in demselben Sinne den zweiten Quadranten und zwar so, daß der von der kleinen Achse durchschnittenen Winkel stets ein stumpfer ist.

Nur für  $\alpha = 0$  ist der Winkel der beiden konjugierten Durchmesser ein Rechter, denn aus Gl. (1) folgt dann  $\beta = 90^\circ$ . Also:

V. Die Hauptachsen sind konjugierte Durchmesser und zwar die einzigen, welche auf einander senkrecht stehen.

Dieser Satz führt zu einer einfachen Konstruktion der Achsen einer Ellipse, die gezeichnet vorliegt. Man beschreibe über einem (aus Satz I zu konstruierenden) Durchmesser einen Halbkreis und verbinde den Schnittpunkt, den dieser mit der Ellipse bildet, mit den Endpunkten des Durchmessers. Die durch den Mittelpunkt der Ellipse zu den Sehnen gezogenen Parallelen sind dann die Achsen. Denn sie stehen senkrecht auf einander und jeder halbiert eine Sehne, die dem andern parallel ist.

Aufg. 1. In den einer Ellipse umgeschriebenen Kreis zeichne man, in symmetrischer Lage zu den Achsen, ein reguläres Achteck und dazu die entsprechende Figur der Ellipse.

Aufg. 2. Welches Paar konjugierter Durchmesser liegt symmetrisch zu den Achsen? Man benutze die entsprechenden Durchmesser des Kreises oder Gleichung (1) und zeige, daß die gesuchten Durchmesser die Diagonalen des durch die Scheitel gehenden umgeschriebenen Rechtecks sind.

Aufg. 3. Man bestimme den Richtungskoeffizienten desjenigen Durchmessers, dessen konjugierter unter  $45^\circ$  geneigt ist, und konstruiere den Durchmesser mit Hülfe des Kreises.

Aufg. 4. Man konstruiere die Schnittpunkte einer Geraden mit einer Ellipse, von der nur die Hauptachsen gegeben sind, ohne die Ellipse selbst zu zeichnen.

Aufg. 5. Es sei  $(x_1, y_1)$  ein Punkt der Ellipse, folglich  $xy_1 - yx_1 = 0$  die Gleichung des zugehörigen Durchmessers. Beweise mit Hülfe von Gleichung (1), daß der konjugierte Durchmesser die Gleichung  $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 0$  besitzt. Bestimme hieraus die Koordinaten seiner Endpunkte.

Aufg. 6. Beweise mit Hülfe des umgeschriebenen Kreises, daß jede Gerade die Ellipse in zwei Punkten schneidet, die reell und verschieden, reell und zusammenfallend, oder imaginär sein können.

#### § 44. Die Gleichung der Ellipse, bezogen auf zwei konjugierte Durchmesser als schiefwinklige Koordinatenachsen.

Die auf die Hauptachsen bezogene Gleichung der Ellipse sei:

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Zwei konjugierte Durchmesser mögen mit der positiven  $x$ -Achse die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  einschließen, so ist (§ 43, (2)):

$$(2) \quad \frac{\cos \alpha \cos \beta}{a^2} + \frac{\sin \alpha \sin \beta}{b^2} = 0.$$

Sind die beiden zu  $\alpha$  und  $\beta$  gehörigen Durchmesser resp. gleich  $2a'$  und  $2b'$ , so bestehen zwischen  $a'$  und  $a$  einerseits,  $b'$  und  $b$  andererseits die Relationen (§ 41):

$$(3) \quad \frac{\cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{b^2} = \frac{1}{a'^2},$$

$$(4) \quad \frac{\cos^2 \beta}{a^2} + \frac{\sin^2 \beta}{b^2} = \frac{1}{b'^2}.$$

Wählt man jetzt die beiden durch  $\alpha$  und  $\beta$  bestimmten Durchmesser als  $x'$ -Achse, resp.  $y'$ -Achse eines neuen schiefwinkligen Koordinatensystems, so gelten die Transformationsformeln (§ 15):

$$(5) \quad \begin{aligned} x &= x' \cos \alpha + y' \cos \beta, \\ y &= x' \sin \alpha + y' \sin \beta. \end{aligned}$$

Führt man aber diese Werte von  $x$  und  $y$  in (1) ein und berücksichtigt (2), (3) und (4), so ergibt sich (vergleiche auch Aufg. 3, § 15):

$$(6) \quad \frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} = 1$$

als Gleichung der Ellipse, bezogen auf die konjugierten Durchmesser  $2a'$  und  $2b'$ .

Diese Gleichung setzt die im vorhergehenden Paragraphen besprochene (schiefe) Symmetrie der Ellipse in Bezug auf zwei konjugierte Durchmesser in Evidenz. Sie ist genau von derselben Form, wie die auf die Hauptachsen bezogene Ellipsengleichung, welche sie als speziellen Fall enthält.

Aufg. 1. Man suche die Gleichung der Ellipse mit den Halbachsen  $a$  und  $b$ , bezogen auf die beiden zu den Achsen symmetrischen konjugierten Durchmesser. Man findet:

$$x'^2 + y'^2 = a'^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} \quad (\S 43, \text{Aufg. 2}).$$

Aufg. 2. Wie lautet die Gleichung der Ellipse mit den Halbachsen  $a = 7$ ,  $b = 5$ , bezogen auf ein Paar konjugierter Durchmesser, von denen der als Abscissenachse gewählte parallel der Geraden  $2x + 7y - 4 = 0$  ist?

#### § 45. Die Ellipse und die Gerade. Die Tangente in einem Punkte der Ellipse.

Um die Schnittpunkte der auf die beiden konjugierten Durchmesser  $2a'$  und  $2b'$  bezogenen Ellipse:

$$(1) \quad \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1$$

mit der auf dasselbe Koordinatensystem bezogenen Geraden:

$$(2) \quad Ax + By + C = 0$$

zu finden, rechne man etwa aus (2)  $y$  aus und setze in (1) ein. Man erhält dann die quadratische Gleichung:

$$(3) \quad (A^2 a'^2 + B^2 b'^2)x^2 + 2ACa'^2x + (C^2 - B^2b'^2)a'^2 = 0,$$

deren beide Wurzeln die Abscissen der Schnittpunkte liefern. Die Realität derselben hängt von dem Vorzeichen der Diskriminante:

$$(4) \quad \begin{aligned} A^2C^2a'^4 - (A^2a'^2 + B^2b'^2)(C^2 - B^2b'^2)a'^2 \\ = a'^2b'^2B^2(A^2a'^2 + B^2b'^2 - C^2), \end{aligned}$$

d. h. von dem Vorzeichen des Ausdruckes  $A^2a'^2 + B^2b'^2 - C^2$  ab. Es folgt also:

Die Gerade schneidet die Ellipse in zwei reellen und von einander verschiedenen, in zwei reellen und zusammenfallenden, oder in zwei imaginären Punkten je nachdem  $A^2a'^2 + B^2b'^2 \gtrless C^2$  ist.

Verweilen wir speziell bei dem Falle, wo die Gerade die Ellipse in zwei zusammenfallenden Punkten trifft, d. h. berührt. Die quadratische Gleichung (3) liefert dann die Abscisse  $x_1$  des Berührungspunktes und zwar findet man, mit Rücksicht auf  $A^2a'^2 + B^2b'^2 = C^2$ , leicht:

$$(5) \quad x_1 = -\frac{A}{C} a'^2.$$

Führt man diesen Wert in (2) ein, so erhält man die Ordinate des Berührungspunktes, nämlich:

$$(6) \quad y_1 = -\frac{B}{C} b'^2.$$

Mit Hülfe dieser Koordinaten  $x_1, y_1$  des Berührungspunktes kann man aber jetzt  $\frac{A}{C}$  und  $\frac{B}{C}$  durch  $-\frac{x_1}{a'^2}$  und  $-\frac{y_1}{b'^2}$  ersetzen, wodurch die Gleichung  $Ax + By + C = 0$ , d. h. die Gleichung der Tangente im Punkte  $(x_1, y_1)$  die Form erhält:

$$(7) \quad \frac{xx_1}{a'^2} + \frac{yy_1}{b'^2} = 1.$$

Der Wichtigkeit dieser Gleichung wegen wollen wir die-

selbe noch auf einem zweiten Wege ableiten. Die Tangente der Ellipse in einem Punkte  $P_1$  war (§ 34) als die Grenzlage definiert worden, welcher sich die Sekante nähert, wenn der zweite Schnittpunkt  $P_2$  mit  $P_1$  zusammenfällt. Sind  $x_1, y_1$  und  $x_2, y_2$  die Koordinaten der Ellipsenpunkte  $P_1$  und  $P_2$ , so lautet die Gleichung der Sekante  $P_1 P_2$ :

$$(8) \quad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1).$$

Da aber:

$$\frac{x_1^2}{a'^2} + \frac{y_1^2}{b'^2} = 1, \quad \frac{x_2^2}{a'^2} + \frac{y_2^2}{b'^2} = 1$$

ist, so folgt:

$$\frac{x_2^2 - x_1^2}{a'^2} + \frac{y_2^2 - y_1^2}{b'^2} = 0,$$

oder:

$$(9) \quad \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{b'^2}{a'^2} \frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1},$$

sodafs wir die Gleichung der Sekante  $P_1 P_2$  in der Form schreiben können:

$$y - y_1 = -\frac{b'^2}{a'^2} \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} (x - x_1).$$

Lassen wir nun  $P_2$  mit  $P_1$  zusammenfallen und setzen demnach  $x_2 = x_1, y_2 = y_1$ , so erhalten wir als Gleichung der Tangente im Punkte  $P_1$ :

$$(10) \quad y - y_1 = -\frac{b'^2 x_1}{a'^2 y_1} (x - x_1).$$

Eine einfache Umformung führt zu:

$$\frac{x x_1}{a'^2} + \frac{y y_1}{b'^2} = \frac{x_1^2}{a'^2} + \frac{y_1^2}{b'^2}.$$

Da aber  $P_1$  auf der Ellipse liegt, ist die rechte Seite gleich 1, d. h. wir gelangen wieder zu Gleichung (7).

Aufg. 1. Bezieht man die Gleichung der Ellipse auf die Halbachsen  $a$  und  $b$ , so lautet die Gleichung der Tangente:  $\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = 1$ . Man leite diese Gleichung dadurch ab, dafs man für den entsprechenden Kreispunkt  $(x'_1, y'_1)$  die Gleichung der Tangente  $x' x'_1 + y' y'_1 = a^2$  aufstellt und zu dieser die entsprechende Gerade aufsucht, welche dann die Tangente in  $(x_1, y_1)$  ist.

Aufg. 2. Bringe die auf die Achsen bezogene Tangentengleichung auf die Normalform.

Aufg. 3. Bestimme die Achsenabschnitte der Tangente  $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$ .

Aufg. 4. Konstruiere die Tangente im Punkte  $(x_1, y_1)$  mit Hilfe der Bemerkung, daß die Tangente in dem entsprechenden Kreispunkte  $(x'_1, y'_1)$  denselben Abschnitt auf der großen Axe bestimmt wie die Ellipsentangente.

Aufg. 5. Man suche den Berührungspunkt und die Gleichung derjenigen Tangente der Ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , welche der Verbindungslinie der beiden Scheitel  $A$  und  $B$  parallel ist.

Aufg. 6. Zeige, daß die Gerade  $x \cos \alpha + y \sin \alpha - \delta = 0$  die Ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  berührt, sobald

$$\delta = \sqrt{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha} \text{ ist.}$$

Aufg. 7. Die Gerade  $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$  berührt die Ellipse  $\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1$ , wenn  $\frac{a'^2}{p^2} + \frac{b'^2}{q^2} = 1$  ist. Welcher Bedingung sind daher umgekehrt  $a'$  und  $b'$  unterworfen, wenn  $p$  und  $q$  gegeben sind? Die Antwort führt zu einem bemerkenswerten Satze.

#### § 46. Tangenten und Durchmesser.

Setzt man in der auf zwei beliebige konjugierte Durchmesser  $2a'$  und  $2b'$  bezogenen Tangentengleichung:

$$\frac{xx_1}{a'^2} + \frac{yy_1}{b'^2} = 1$$

das eine Mal  $y_1 = 0$ ,  $x_1 = a'$ , das andre Mal  $y_1 = 0$ ,  $x_1 = -a'$ , so erhält man die Gleichungen der beiden Tangenten in den Endpunkten des Durchmessers  $2a'$ , nämlich  $x = a'$  und  $x = -a'$ . Dies sind aber die Gleichungen zweier Parallelen zur  $y$ -Achse, d. h. zum konjugierten Durchmesser  $2b'$ . Es folgt daher (vergl. § 45, Aufg. 6):

I. Die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers sind dem konjugierten Durchmesser und folglich auch einander parallel.

Man kann diesen Satz auch so ableiten, daß man eine Sehne parallel zu sich so lange verschiebt, bis ihre Schnittpunkte zusammengefallen sind und die Sehne zur Tangente geworden ist. Der zu dem Berührungspunkte gehörige Durchmesser ist dann, als Ort der Mittelpunkte der parallelen Sehnen, zu der Richtung derselben konjugiert.

Bestimmt man für zwei zur  $x$ -Achse, d. h. zum Durch-

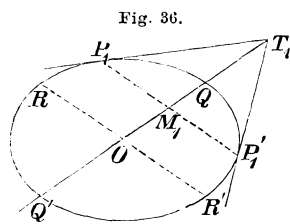


Fig. 36.

messer  $2a'$ , symmetrisch gelegene Punkte  $(x_1, y_1)$  und  $(x_1, -y_1)$  die Tangenten und berechnet, indem man  $y = 0$  setzt, für beide den Abschnitt auf der  $x$ -Achse, so findet man beide Male denselben Abschnitt:

$$OT_1 = \frac{a'^2}{x_1}, \text{ d. h.:}$$

II. Zwei beliebige Tangenten der Ellipse treffen sich stets in einem Punkte desjenigen Durchmessers, welcher die Verbindungslinie ihrer Berührungspunkte halbiert.

Schreibt man die Gleichung  $OT_1 = \frac{a'^2}{x_1}$  in der Form  $OT_1 \cdot OM_1 = a'^2 = OQ^2 = OQ'^2$ , so erkennt man, daß  $Q, Q', M_1, T_1$  harmonische Punkte sind.

Zwei Sehnen, welche einen beliebigen Punkt der Ellipse mit den Endpunkten eines Durchmessers verbinden, heißen Supplementarsehnen. Zieht man zu zwei Supplementarsehnen parallele Durchmesser, so werden jene von diesen halbiert; von den beiden Durchmessern halbiert also jeder eine Sehne, die dem andern parallel ist, d. h.:

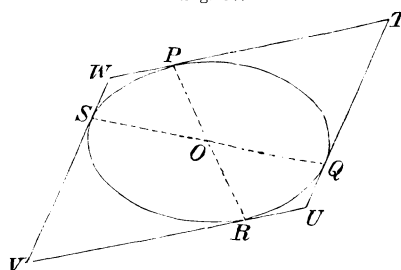
III. Die zu irgend einem Paare Supplementarsehnen parallelen Durchmesser sind konjugiert.

Denken wir einer Ellipse ein ganz beliebiges Parallelogramm umgeschrieben, indem wir in den Endpunkten zweier beliebiger Durchmesser  $PR$  und  $QS$  die Tangenten konstruieren, so bilden die Berührungspunkte  $P, Q, R, S$  ein der Ellipse eingeschriebenes Parallelogramm. Zieht man nun die zu den Seiten dieses Parallelogramms parallelen Durchmesser, so sind diese nach Satz III konjugiert und halbieren die Seiten des

eingeschriebenen Parallelogramms. Infolge von Satz II gehen dann aber diese Durchmesser durch die Ecken  $T, U, V, W$  des umgeschriebenen Parallelogramms, d. h. sie sind die Diagonalen desselben. Es gilt daher der Satz:

IV. Die Diagonalen eines jeden der Ellipse umgeschriebenen Parallelogramms sind konjugierte Durchmesser.

Fig. 37.



Wir wollen endlich noch die Gleichung der Ellipse ableiten, wenn zur  $x$ -Achse ein beliebiger Durchmesser  $2a'$  und zur  $y$ -Achse die in dem einen Endpunkte von  $2a'$  konstruierte Tangente gewählt wird, welche dann nach I dem konjugierten Durchmesser  $2b'$  parallel ist. Die auf  $2a'$  und  $2b'$  bezogene Ellipsengleichung lautet:

$$(1) \quad \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1.$$

Um auf die neuen Achsen zu transformieren, haben wir nur  $x$  durch  $x - a'$  zu ersetzen (§ 6), indem wir der Einfachheit halber auch für die neuen Koordinaten die Bezeichnungen  $x, y$  (statt  $x', y'$ ) wählen.

Man erhält dann:

$$\frac{(x - a')^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1,$$

oder:

$$(2) \quad y^2 = 2 \frac{b'^2}{a'} x - \frac{b'^2}{a'^2} x^2.$$

Geht man speziell von den beiden symmetrisch zu den Hauptachsen gelegenen konjugierten Durchmessern aus (§ 44, Aufg. 1), so ist  $a' = b'$  und die Gleichungen (1) und (2) nehmen dann die Form an:

$$(3) \quad x^2 + y^2 = a'^2$$

und

$$(4) \quad y^2 = 2a'x - x^2.$$



Diese Gleichungen stimmen genau mit der Mittelpunkts-  
gleichung, resp. Scheitelfgleichung des Kreises überein (§ 31,  
Gl. (6) und (3)). Während sie aber bei dem Kreise für un-  
zählig viele rechtwinklige Koordinatensysteme gelten,  
finden sie bei der Ellipse nur für ein einziges und zwar  
schiefwinkliges Achsensystem Anwendung.

Legt man endlich rechtwinklige Koordinaten zu Grunde,  
indem man setzt  $a' = a$ ,  $b' = b$ ,  $\frac{b^2}{a} = p$ , wo  $p$  den Halbpara-  
meter bedeutet, so geht (2) in die Scheitelfgleichung der  
Ellipse über, nämlich in:

$$(5) \quad y^2 = 2px - \frac{p}{a} x^2.$$

Aufg. Man konstruiere zu einer Ellipse ein beliebiges  
umgeschriebenes Parallelogramm oder Rechteck. Welche Lage  
müssen umgeschriebene Rhomben haben?

#### § 47. Die exzentrische Anomalie.

Schreiben wir die auf die Hauptachsen bezogene Ellipsen-  
gleichung in der Form:

$$(1) \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

so erkennen wir, daß die echten Brüche  $\frac{x}{a}$  und  $\frac{y}{b}$  als Kosinus  
resp. Sinus desselben Winkels  $v$  angesehen werden können.

Setzen wir nämlich:

$$(2) \quad x = a \cos v, \quad y = b \sin v,$$

so erhalten wir für jedes Zahlenpaar  $x, y$ , welches der Glei-  
chung (1) genügt, und nur für solche, aus den Gleichungen  
(2) einen ganz bestimmten Wert von  $v$ . Aber auch um-  
gekehrt liefern die Gleichungen (2) für jeden Wert von  $v$   
ein Zahlenpaar  $x, y$ , welches der Gleichung (1) genügt, denn  
es ist allemal:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 v + \sin^2 v = 1.$$

Da also Gleichung (1) und die Gleichungen (2) genau die-  
selben Zahlenpaare  $x, y$  definieren, so sagen wir, die beiden  
Gleichungen (2) seien der einen Gleichung (1) äquivalent. Man  
nennt den variablen Parameter  $v$ , mit Hülfe dessen man sämt-

liche Punkte der Ellipse darstellen kann, die exzentrische Anomalie des Punktes  $(x, y)$ . Da ein Punkt der Ellipse vollständig durch seine exzentrische Anomalie bestimmt ist, so können wir den Punkt  $(x, y)$  der Ellipse auch kurz den Punkt  $(v)$  nennen.

Aus der Figur des § 42 ergibt sich aber auch sofort die geometrische Bedeutung von  $v$ . Trifft nämlich ein beliebiger, durch den Mittelpunkt der Ellipse gezogener Strahl den eingeschriebenen Kreis in  $Q$ , den umgeschriebenen Kreis in  $P'$ , so hat der zugehörige Ellipsenpunkt (man vergl. die a. a. O. beschriebene Konstruktion) dieselbe Abscisse wie  $P'$  und dieselbe Ordinate wie  $Q$ . Da aber andererseits die Koordinaten von  $P$  resp.  $a \cos v$  und  $b \sin v$  sind, so folgt, daß  $v$  gleich dem Winkel ist, welchen der Strahl  $OQ P'$  mit der positiven Richtung der  $x$ -Achse bildet, d. h.:

Die exzentrische Anomalie eines Ellipsenpunktes ist die Anomalie des entsprechenden Punktes des umgeschriebenen Kreises.

Aufg. 1. Bestimme die exzentrische Anomalie des Punktes  $(3; -1,6)$ , der Ellipse  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ .

Aufg. 2. Durch welche Gleichungen wird die exzentrische Anomalie eines Punktes der Ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  definiert, welcher senkrecht über einem Brennpunkte liegt?

Aufg. 3. Bestimme die Koordinaten des Punktes  $v = 45^\circ$ .

Aufg. 4. In welcher Beziehung stehen die exzentrischen Anomalien der Endpunkte eines Durchmessers?

#### § 48. Weitere Sätze über konjugierte Durchmesser.

Sei  $P$  ein beliebiger Punkt der Ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Bezeichnet man mit  $v$  seine exzentrische Anomalie, mit  $x, y$  seine rechtwinkligen Koordinaten und mit  $a'$  den zugehörigen Halbmesser  $OP$ , so hat man:

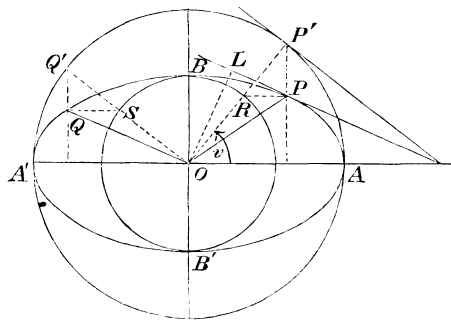
$$\begin{aligned} x &= a \cos v, & y &= b \sin v, \\ a'^2 &= x^2 + y^2, \end{aligned}$$

folglich:

$$(1) \quad a'^2 = a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v.$$

Aus der in § 43 gegebenen Konstruktion des zu  $OP$  konjugierten Halbmessers  $OQ$ , welche auch die nachstehende Figur zur Darstellung bringt, folgt, daß der Endpunkt  $Q$  die

Fig. 38.



exzentrische Anomalie  $v + 90^\circ$  besitzt und somit seine Koordinaten resp.  $-a \sin v$  und  $b \cos v$  sind. Setzt man nun  $OQ = b'$ , so folgt:

$$(2) \quad b'^2 = a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v.$$

Addieren wir (1) und (2), so erhalten wir:

$$(3) \quad a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2,$$

d. h.: I. Die Summe der Quadrate zweier konjugierter Halbmesser ist konstant und zwar gleich der Summe der Quadrate der Halbachsen.

Um ferner den Inhalt des von den beiden konjugierten Halbmessern  $OP$  und  $OQ$  gebildeten Dreiecks  $OPQ$  zu berechnen, haben wir nur die Koordinaten  $a \cos v$ ,  $b \sin v$ , resp.  $-a \sin v$ ,  $b \cos v$  der Punkte  $P$  und  $Q$  in die Formel:

$$J = \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

einzusetzen. Wir erhalten:

$$(4) \quad J = \frac{1}{2}ab,$$

in Worten:

II. Das durch die Verbindung der Endpunkte zweier konjugierter Halbmesser entstehende Dreieck hat einen konstanten Inhalt.

Da der Inhalt des Dreiecks  $OPQ$  aber auch durch  $\frac{1}{2}a'b' \sin \omega$  ausgedrückt werden kann, insofern  $\omega$  den von den

beiden konjugierten Durchmessern eingeschlossenen spitzen Winkel bedeutet, so erhalten wir aus:

$$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}a'b' \sin \omega$$

die Relation:

$$(5) \quad \sin \omega = \frac{ab}{a'b'},$$

durch welche man den von den beiden konjugierten Durchmessern  $2a'$  und  $2b'$  eingeschlossenen spitzen Winkel, den sogenannten Konjugationswinkel, berechnen kann.

Der Konjugationswinkel wird seinen kleinsten Wert erhalten, wenn das Produkt  $a'b'$  seinen größten Wert annimmt. Nun ist:

$$2a'b' = a'^2 + b'^2 - (a' - b')^2 = a^2 + b^2 - (a - b)^2,$$

woraus man erkennt, daß für  $a' = b'$  das Produkt  $a'b'$  ein Maximum wird. Dieser Fall tritt ein, wenn die exzentrische Anomalie von  $a'$  gleich  $45^\circ$  wird; dann folgt aber aus (1) und (2) (oder auch aus Satz I):

$$(6) \quad a'^2 = b'^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} \quad (\S 44, \text{Aufg. 1})$$

und ferner:

$$(7) \quad \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}.$$

Wir sehen also:

III. Unter allen Paaren konjugierter Durchmesser schließt das Paar der gleichen, zu den Hauptachsen symmetrisch gelegenen konjugierten Durchmesser den kleinsten Konjugationswinkel ein.

Bezeichnen wir mit  $\delta$  den Abstand  $OL$  des Mittelpunktes  $O$  von der Tangente in  $P$ , die ja zu  $OQ$  parallel ist, so ist  $\delta$  zugleich der Abstand des Punktes  $P$  von  $OQ$ , und demnach das Dreieck  $OPQ$  auch gleich  $\frac{1}{2}b'\delta$ . Durch Vergleichen mit  $\frac{1}{2}ab$  ergibt sich dann aber:

$$(8) \quad \delta = \frac{ab}{b'}.$$

Diese Gleichung können wir auch direkt ableiten. Setzt man nämlich in die Gleichung  $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$  einer Ellipsentangente für die Koordinaten des Berührungspunktes  $(x_1, y_1)$  die Koor-

dinaten von  $P$ , nämlich  $a \cos v$ ,  $b \sin v$  ein, so erhält man die Gleichung der Tangente in  $P$  in der Form:

$$(9) \quad \frac{x \cos v}{a} + \frac{y \sin v}{b} = 1.$$

Aus dieser Gleichung findet man den Abstand  $\delta$  der Tangente vom Anfangspunkte (§ 22), nämlich:

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 v}{a^2} + \frac{\sin^2 v}{b^2}}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v}}.$$

Der Nenner ist aber zufolge Gleichung (2) gleich  $b'$ .

Aufg. 1. Sprich Satz II in der Form aus: Die Parallelogramme, welche entstehen, wenn man die Endpunkte irgend zweier konjugierter Durchmesser verbindet, sind inhaltsgleich. Beweise, daß auch die Parallelogramme, welche durch die Tangenten in den Endpunkten konjugierter Durchmesser gebildet werden, konstanten Inhalt haben.

Aufg. 2. Zeige, daß  $\operatorname{tg} \omega = -\operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{2ab}{c^2 \sin 2v}$  ist, insofern  $\omega$  den Konjugationswinkel und  $v$  die dem spitzen Winkel  $\alpha$  entsprechende exzentrische Anomalie bedeutet. Für  $v = 45^\circ$  folgt dann Satz III. Die trigonometrischen Funktionen des kleinsten Konjugationswinkels sind  $\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{b}{a}$ ,  $\sin \omega = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$ ,  $\cos \omega = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$  etc.

Aufg. 3. Aus der Länge  $a'$  eines Halbmessers berechne man die zugehörige exzentrische Anomalie  $v$  und den Winkel  $\alpha$ , den  $a'$  mit der  $x$ -Achse bildet. Mit Hülfe von (1) findet man:

$$\operatorname{tg} v = \sqrt{\frac{a^2 - a'^2}{a'^2 - b^2}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{a^2 - a'^2}{a'^2 - b^2}}.$$

Aufg. 4. Einem gegebenen Parallelogramme mit den Diagonalen  $2a'$  und  $2b'$ , deren spitzer Winkel gleich  $\omega$  sei, kann stets eine, aber auch nur eine Ellipse umgeschrieben werden, für welche jene Diagonalen konjugierte Durchmesser sind. Man findet nämlich zunächst die Achsen  $a$  und  $b$  in eindeutiger Weise aus  $a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2$  und  $a'b' \sin \omega = ab$  und zwar erhält man:

$$a + b = \sqrt{a'^2 + b'^2 + 2a'b' \sin \omega}, \quad a - b = \sqrt{a'^2 + b'^2 - 2a'b' \sin \omega}.$$

Die Lage der Achse  $a$  findet man dann aus dem in Aufg. 3 gegebenen Ausdrücke für  $\operatorname{tg} \alpha$ .

Aufg. 5. Führe die vorhergehende Aufgabe durch für  $a' = 13$ ,  $b' = 6$ ,  $\sin \omega = \frac{7}{13}$ .

Aufg. 6. Für die Abstände  $\delta$  und  $\delta'$  zweier zu einander senkrechter Tangenten hat man (§ 45, Aufg. 6):

$$\delta^2 = a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha, \quad \delta'^2 = a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha,$$

folglich  $\delta^2 + \delta'^2 = a^2 + b^2$ . Beweise daraus, daß der Ort der Schnittpunkte zu einander senkrechter Tangenten der mit dem Radius  $\sqrt{a^2 + b^2}$  um den Mittelpunkt der Ellipse beschriebene Kreis ist. Beweise den gleichen Satz auch aus (8), mit Benutzung von § 41, Gl. (9).

Aufg. 7. Beweise Satz II aus der Affinität der Dreiecke  $OPQ$  und  $OP'Q'$ .

#### § 49. Pol und Polare.

Die auf zwei konjugierte Durchmesser  $2a'$  und  $2b'$  bezogene Gleichung einer Ellipse lautet:

$$(1) \quad \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1.$$

Es seien nun zwei beliebige Punkte  $P_1$  und  $P_2$  gegeben, deren Koordinaten  $x_1, y_1$  und  $x_2, y_2$  sich auf dieselben schiefwinkligen Achsen  $2a'$  und  $2b'$  beziehen sollen. Um die Schnittpunkte der Geraden  $P_1P_2$  mit der Ellipse zu bestimmen, erinnern wir uns, daß ein jeder Punkt  $P$  der Verbindungslinie  $P_1P_2$  durch die Koordinaten:

$$(2) \quad x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

dargestellt werden kann, insofern  $\lambda$  das Teilverhältnis von  $P$  in Bezug auf  $P_1P_2$  bedeutet. Soll  $P$  auch auf der Ellipse liegen, so müssen seine Koordinaten der Gleichung (1) genügen, d. h. es muß sein:

$$\frac{1}{a'^2} \left( \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \right)^2 + \frac{1}{b'^2} \left( \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \right)^2 = 1,$$

oder geordnet:

$$(3) \quad \lambda^2 \left( \frac{x_2^2}{a'^2} + \frac{y_2^2}{b'^2} - 1 \right) + 2\lambda \left( \frac{x_1 x_2}{a'^2} + \frac{y_1 y_2}{b'^2} - 1 \right) + \left( \frac{x_1^2}{a'^2} + \frac{y_1^2}{b'^2} - 1 \right) = 0.$$

Die beiden Wurzeln  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  dieser quadratischen Gleichung stellen die Teilverhältnisse der Schnittpunkte von  $P_1 P_2$  mit der Ellipse dar. Liegen nun zufällig die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  so, daß der Koeffizient von  $2\lambda$ , nämlich  $\frac{x_1 x_2}{a'^2} + \frac{y_1 y_2}{b'^2} - 1$ , verschwindet, so sind die Wurzeln von (3) einander entgegengesetzt gleich, und es bilden dann die Punkte  $P_1$  und  $P_2$  mit den Schnittpunkten  $S_1$  und  $S_2$  (falls diese überhaupt reell sind) eine harmonische Gruppe. Sollen umgekehrt  $P_1, P_2, S_1, S_2$  harmonische Punkte sein, so muß  $\lambda_1 = -\lambda_2$ , d. h.  $\frac{x_1 x_2}{a'^2} + \frac{y_1 y_2}{b'^2} - 1 = 0$  sein.

Dies vorausgeschickt, sei jetzt  $P_1$  ein fester Punkt. Wir legen durch ihn alle möglichen Strahlen und bestimmen jedesmal zu  $P_1$  und den beiden Schnittpunkten  $S_1$  und  $S_2$  (falls dieselben überhaupt reell sind) den vierten harmonischen,  $P_1$  zugeordneten Punkt  $P_2$ . Die Koordinaten von  $P_2$  müssen allemal der Gleichung:

$$(4) \quad \frac{x x_1}{a'^2} + \frac{y y_1}{b'^2} = 1$$

genügen, und umgekehrt ist jeder Punkt, dessen Koordinaten (4) befriedigen, so gelegen, daß seine Verbindungslinie mit  $P_1$  durch die Ellipse harmonisch geteilt wird, falls sie dieselbe überhaupt in reellen Punkten trifft. Da aber (4) die Gleichung einer Geraden ist, so folgt:

Zieht man von einem beliebigen Punkte Strahlen nach einer Ellipse und bestimmt jedesmal zu den beiden Schnittpunkten und dem gegebenen Punkte, als zugeordnetem, den vierten harmonischen Punkt, so ist der Ort dieser vierten harmonischen Punkte eine gerade Linie.

Man nennt diese Gerade die Polare des gegebenen Punktes und diesen den Pol der Geraden.

Liegt  $P_1$  innerhalb der Ellipse, so liegen die vierten harmonischen Punkte alle außerhalb (§ 4); die Polare

schneidet dann die Ellipse nicht. Befindet sich dagegen  $P_1$  aufserhalb, so erhält man für jeden Strahl, welcher die Ellipse in reellen Punkten trifft, einen innerhalb gelegenen vierten harmonischen Punkt; die Polare trifft dann die Ellipse in zwei reellen Punkten. Sei  $P_2$  ein solcher Schnittpunkt, so erfüllen die Koordinaten  $x_2, y_2$  desselben nicht nur Gleichung (4), sondern es ist auch  $\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} - 1 = 0$ , d. h. die Wurzeln  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  von (3) werden beide unendlich grofs (vgl. § 56), die Schnittpunkte  $S_1$  und  $S_2$  fallen daher mit  $P_2$  zusammen, sodaß  $P_1P_2$  die Ellipse in  $P_2$  berührt. Umgekehrt liegt der Berührungspunkt jeder von  $P_1$  an die Ellipse gelegten Tangente auf der Polaren von  $P_1$ . Denn sei etwa  $P'$  mit den Koordinaten  $x', y'$  ein solcher Berührungspunkt, so wird die Gleichung seiner Tangente durch  $P_1$  befriedigt, d. h. es ist  $\frac{x_1x'}{a^2} + \frac{y_1y'}{b^2} = 1$ . Diese Gleichung sagt aber zugleich aus, daß  $x', y'$  die Gleichung (4) befriedigen, daß also  $P'$  auf der Polaren von  $P_1$  liegt. Zugleich geht hieraus hervor, daß von jedem aufserhalb gelegenen Punkte zwei reelle Tangenten an die Ellipse gelegt werden können.

Nehmen wir endlich an, der Pol  $P_1$  liege auf der Ellipse, dann stellt (4) die Gleichung der Tangente von  $P_1$  dar, d. h.: Die Tangente einer Ellipse ist die Polare ihres Berührungspunktes, dieser der Pol seiner Tangente. Dasselbe zeigt auch Gleichung (3); denn wenn der Koeffizient von  $\lambda$  und das absolute Glied verschwinden, so ist  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , d. h. die beiden Schnittpunkte  $S_1$  und  $S_2$  von  $P_1P_2$  fallen zusammen, sodaß  $P_2$  allemal auf der Tangente von  $P_1$  liegen muß.

Aufg. 1. Man konstruiere zu einem beliebigen Punkte  $P$  in Bezug auf eine Ellipse die Polare mittels des vollständigen Vierecks. Man lege durch  $P$  zwei Strahlen, welche die Ellipse resp. in  $R_1, R_2$  und  $S_1, S_2$  schneiden mögen. Die Verbindungslinie des Schnittpunktes von  $R_1S_2$  und  $R_2S_1$  mit dem Schnittpunkte von  $R_1S_1$  und  $R_2S_2$  ist die gesuchte Polare (§ 28).

Aufg. 2.  $P_1$  liege aufserhalb der Ellipse. Man suche die für diesen Fall ausgesprochenen Sätze geometrisch dadurch



abzuleiten, daß man den durch  $P_1$  gezogenen Strahl dreht, bis seine Schnittpunkte zusammenfallen.

Aufg. 3. Man überlege an Hand der Zeichnung, wie sich die Berührungssehne, d. h. die Verbindungslinie der Berührungspunkte der beiden von dem außerhalb gelegenen Punkte  $P_1$  an die Ellipse gelegten Tangenten, bewegt, wenn  $P_1$  sich immer mehr und mehr der Ellipse nähert.

Aufg. 4. Einer Ellipse sei ein beliebiges Viereck eingeschrieben. Die Schnittpunkte von je zwei Gegenseiten heißen die drei Diagonalepunkte. Beweise, daß jeder derselben der Pol der Verbindungslinie der beiden andern ist.

Aufg. 5. Man konstruiere von einem außerhalb einer Ellipse gelegenen Punkte die beiden Tangenten an dieselbe mittels der Polaren (Aufg. 1).

#### § 50. Lehrsätze über Pol und Polare.

Zu jedem Punkte  $P_1$  existiert eine ganz bestimmte Polare, deren Gleichung:

$$(1) \quad \frac{x x_1}{a'^2} + \frac{y y_1}{b'^2} = 1$$

ist. Aber auch umgekehrt kann jede Gerade:

$$(2) \quad Ax + By + C = 0$$

als die Polare eines ganz bestimmten Poles aufgefaßt werden. Die Gleichungen (1) und (2) werden nämlich identisch, wenn man setzt:

$$\frac{x_1}{a'^2} = -\frac{A}{C}, \quad \frac{y_1}{b'^2} = -\frac{B}{C},$$

oder:

$$(3) \quad x_1 = -\frac{A}{C} a'^2, \quad y_1 = -\frac{B}{C} b'^2.$$

Es ist daher  $Ax + By + C = 0$  die Polare des durch (3) definierten Punktes (vergl. § 45, Gl. (5) und (6)). Die Formeln (3) werden für  $C = 0$  illusorisch, insofern dann  $x_1$  und  $y_1$  unendlich groß oder, wenn auch noch eine der Größen  $A$  und  $B$  verschwinden sollte, unbestimmt werden. Da nun für  $C = 0$  die gegebene Gerade ein Durchmesser wird und da es ganz gleichgültig ist, welches Paar konjugierter Durchmesser wir zu Koordinatenachsen wählen, so wollen wir diesen Fall

folgendermaßen behandeln. Der Durchmesser  $2b'$  werde von Anfang an parallel zu der gegebenen Geraden gewählt, die wir dann nachher parallel mit sich verschieben werden, bis sie mit dem Durchmesser  $2b$ , d. h. mit der Ordinatenachse zusammenfällt. Die Gleichung der gegebenen Geraden, bezogen auf die konjugierten Durchmesser  $2a'$  und  $2b'$ , lautet jetzt:

$$(4) \quad Ax + C = 0.$$

Folglich hat ihr Pol die Koordinaten:

$$(5) \quad x_1 = -\frac{A}{C} a'^2, \quad y_1 = 0,$$

d. h. er liegt auf dem zur Richtung der Geraden konjugierten Durchmesser (vgl. § 46, II). Wird nun  $C$  immer kleiner und kleiner, bis die Gerade mit  $2b'$  zusammenfällt, so wächst  $x_1$  bis ins Unendliche, d. h.:

I. Der Pol eines Durchmessers ist der unendlich entfernte Punkt des konjugierten Durchmessers (§ 46 Satz I).

Wir kommen zu dem gleichen Resultate, wenn wir von dem Pole statt von der Polaren ausgehen. Ist  $P_1$  gegeben, so können wir, ohne die Allgemeinheit zu stören,  $2a'$  und  $2b'$  so wählen, daß  $P_1$  auf dem Durchmesser  $2a'$ , d. h. auf der  $x$ -Achse liegt. Dann lautet, wegen  $y_1 = 0$ , die Gleichung der Polaren von  $P_1$ :

$$\frac{x x_1}{a'^2} = 1,$$

oder:

$$(6) \quad x = \frac{a'^2}{x_1},$$

d. h. die Polare ist parallel zu dem Durchmesser, der dem durch  $P_1$  gehenden konjugiert ist, und fällt für  $x_1 = \infty$  mit diesem zusammen.

In Bezug auf die Ellipse  $\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1$  mögen zwei Punkte  $P_1$  und  $P_2$  so liegen, daß  $P_2$  auf der Polaren von  $P_1$  sich befindet. Dann besteht die Gleichung:

$$(7) \quad \frac{x_1 x_2}{a'^2} + \frac{y_1 y_2}{b'^2} = 1.$$

Diese Gleichung drückt dann aber auch aus, daß  $P_1$  auf der Polaren  $\frac{xx_2}{a'^2} + \frac{yy_2}{b'^2} = 1$  von  $P_2$  liegt, und es gilt daher der Satz:

II. Liegt ein Punkt  $P_2$  auf der Polaren von  $P_1$ , so liegt auch  $P_1$  auf der Polaren von  $P_2$  und umgekehrt.

Man kann diesen Satz auch so aussprechen:

III. Bewegt sich ein Punkt auf einer Geraden, so dreht sich seine Polare um den Pol der Geraden, und umgekehrt, dreht sich eine Gerade um einen Punkt, so bewegt sich ihr Pol auf der Polaren des Punktes. Oder auch: Den Punkten einer Punktreihe entsprechen als Polaren die Strahlen eines Strahlenbüschels, und umgekehrt.

Da der Pol eines Durchmessers der unendlich ferne Punkt des konjugierten Durchmessers ist und da alle Durchmesser durch den Mittelpunkt gehen, so müssen wir in Übereinstimmung mit III die unendlich fernen Punkte der Ebene als auf einer Geraden befindlich voraussetzen. Diese unendlich ferne Gerade der Ebene ist dann als die Polare des Mittelpunktes zu bezeichnen.

Aufg. 1. Man überzeuge sich, daß die auf Pol und Polare bezüglichen Sätze unabhängig von dem Koordinatensysteme sind. Dasselbe wurde nur zur Herleitung benutzt und, wie die Ausführungen des Textes zeigen, für den zu behandelnden Fall allemal zweckentsprechend gewählt.

Aufg. 2. Man leite die an die Gleichungen (4), (5) und (6) anknüpfenden Bemerkungen aus § 46 (insbesondere Satz II) ab; vergleiche namentlich die dort gegebene Gleichung:  $OT_1 = \frac{a'^2}{x_1}$  mit (6).

Aufg. 3. Zeige direkt, daß den Punkten der durch  $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$ ,  $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$  dargestellten Punktreihe als Polaren die Strahlen des Strahlenbüschels  $G_1 + \lambda G_2 = 0$  entsprechen, insofern  $G_1 = 0$  und  $G_2 = 0$  die Polaren von  $(x_1, y_1)$  und  $(x_2, y_2)$  sind und  $\lambda$  einen variablen Parameter bedeutet, der alle Werte von  $-\infty$  bis  $+\infty$  zu durchlaufen hat. Beachte speziell die Werte  $0, \infty, +1, -1$ .

Aufg. 4. Leite aus II den folgenden Satz ab: Wenn

durch einen Punkt  $P$  ein beliebiger Strahl nach einer Ellipse gezogen wird, welcher dieselbe in  $S_1$  und  $S_2$  trifft, so schneiden sich die Tangenten von  $S_1$  und  $S_2$  in einem Punkte  $Q$  der Polaren von  $P$ .

Aufg. 5. Man leite den in der vorhergehenden Aufgabe ausgesprochenen Satz aus § 49, Aufg. 1 dadurch ab, daß man die Strahlen  $PR_1R_2$  und  $PS_1S_2$  zusammenfallen läßt.

Aufg. 6. Man konstruiere, mit Benutzung von II, zu einer die Ellipse nicht schneidenden Geraden den zugehörigen Pol.

Aufg. 7. Bestimme den Ort der Pole der sämtlichen Tangenten des Kreises  $x^2 + y^2 = a^2$  in Bezug auf die konzentrische Ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

### § 51. Brennpunkteigenschaften.

Für die zu einem beliebigen Punkte  $P$  der Ellipse:

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

gehörigen Brennstrahlen  $r$  und  $r'$  (§ 39) hatten wir gefunden:

$$(2) \quad r^2 = (c - x)^2 + y^2, \quad r'^2 = (c + x)^2 + y^2.$$

Durch Subtraktion folgt:

$$(r' + r)(r' - r) = 4cx,$$

und da  $r' + r = 2a$  ist:

$$r' - r = 2 \frac{c}{a} x.$$

Führt man nun für die numerische Exzentrizität  $\frac{c}{a}$  die Bezeichnung  $\varepsilon$  ein (§ 41), so erhält man zur Bestimmung von  $r$  und  $r'$  die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} r' + r &= 2a, \\ r' - r &= 2\varepsilon x, \end{aligned}$$

woraus sich ergibt:

$$(3) \quad r = a - \varepsilon x, \quad r' = a + \varepsilon x.$$

Führt man statt der Abscisse von  $P$  die exzentrische Anomalie  $v$  ein, indem man  $x = a \cos v$  setzt, so erhält man durch

Multiplikation von  $r$  und  $r'$ , mit Berücksichtigung von  $c = \varepsilon a$  und  $c^2 = a^2 - b^2$ , die Gleichung:

$$(4) \quad rr' = a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v.$$

Nach § 48, Gl. (2) ist aber die rechte Seite gleich  $b'^2$ , wenn  $b'$  der zu  $OP$  konjugierte Halbmesser ist. Wir erhalten daher die bemerkenswerte Gleichung:

$$(5) \quad rr' = b'^2,$$

in Worten:

I. Das Produkt der Brennstrahlen eines Punktes ist gleich dem Quadrate des zu dem Punkte gehörigen konjugierten Halbmessers.

Um die Abstände  $d$  und  $d'$  der beiden Brennpunkte von der zu  $P$  gehörigen Tangente zu ermitteln, bringe man die Gleichung der letzteren, nämlich:

$$\frac{x \cos v}{a} + \frac{y \sin v}{b} = 1, \quad (\S 48, \text{ Gl. (9)})$$

auf die Normalform und führe dann die Koordinaten der beiden Brennpunkte  $F$  und  $F'$  ein, wodurch man erhält:

$$(6) \quad d = \frac{b}{b'} (a - c \cos v), \quad d' = \frac{b}{b'} (a + c \cos v),$$

oder:

$$(7) \quad d = \frac{b}{b'} (a - \varepsilon x), \quad d' = \frac{b}{b'} (a + \varepsilon x),$$

und mit Rücksicht auf (3):

$$(8) \quad d = \frac{b}{b'} r, \quad d' = \frac{b}{b'} r'.$$

Multipliziert man aber beide Gleichungen und beachtet (5), so folgt:

$$(9) \quad dd' = b^2,$$

d. h.:

II. Das Produkt der Abstände der Brennpunkte von einer Tangente der Ellipse ist konstant und zwar gleich dem Quadrate der kleinen Halbachse.

Aus (8) erhält man ferner die Relation:

$$(10) \quad \frac{d}{r} = \frac{d'}{r'}.$$

Daraus folgt aber die Ähnlichkeit der beiden Dreiecke  $PFG$  und  $PF'G'$  und mithin die Gleichheit der Winkel  $\sphericalangle F'PG'$  und  $\sphericalangle FPG$ . Es gilt daher der Satz:

III. Die Tangente bildet mit den Brennstrahlen gleiche Winkel.

Nennt man die im Punkte  $P$  der Ellipse auf der Tangente senkrecht stehende Gerade die Normale der Ellipse in  $P$ , so kann man Satz III auch so aussprechen:

IV. Die Tangente und Normale eines Punktes der Ellipse sind die Winkelhalbierenden der beiden zu diesem Punkte gehörigen Brennstrahlen.

Aus diesem Satze ergibt sich noch eine interessante Folgerung. Verlängert man nämlich das von dem Brennpunkte  $F$  auf die Tangente in  $P$  gefällte Lot  $FG = d$  um sich selbst, wodurch man zu dem Gegenpunkte  $H$  von  $F$  geführt wird, so folgt aus:

$$\sphericalangle HPG = \sphericalangle FPG = \sphericalangle F'PG',$$

daß die Punkte  $F', P, H$  in gerader Linie liegen. Nun ist:

$$F'H = F'P + PH = F'P + PF = 2a,$$

d. h.:

V. Der Ort der Gegenpunkte eines jeden der beiden Brennpunkte in Bezug auf eine bewegliche Tangente ist der mit dem Radius  $2a$  um den andern Brennpunkt beschriebene Kreis.

Beachtet man, daß  $FF'$  in  $O$ ,  $FH$  in  $G$ ,  $F'H'$  in  $G'$  halbiert werden, so folgt, daß  $OG$  und  $OG'$  resp. zu  $F'H$  und  $F'H'$  parallel sind. Man hat daher:

$$OG = \frac{1}{2}F'H \quad \text{und} \quad OG' = \frac{1}{2}F'H'.$$

Da aber  $F'H = F'H' = 2a$  ist, so ergibt sich:

$$OG = OG' = a,$$

d. h.:

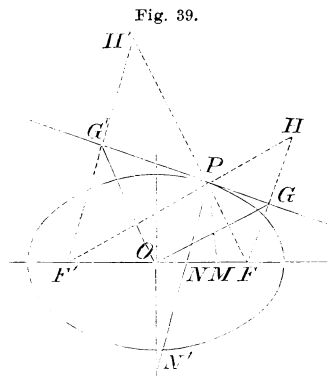


Fig. 39.

VI. Der Ort der Fußpunkte der Lote, die man von den beiden Brennpunkten auf die sämtlichen Tangenten einer Ellipse fällen kann, ist der der Ellipse umgeschriebene Kreis. Oder auch: Die Ellipse wird umhüllt von dem einen Schenkel eines rechten Winkels, dessen Scheitel einen festen Kreis durchläuft, während der andere Schenkel durch einen im Innern befindlichen festen Punkt hindurchgeht.

Die Wichtigkeit aller dieser Sätze wird es rechtfertigen, wenn wir Satz IV, aus welchem sich V und VI als einfache geometrische Folgerungen ergaben, noch auf einem anderen, direkteren Weg ableiten. Bezeichnet man die Koordinaten von  $P$  jetzt mit  $x_1, y_1$ , so lautet die Gleichung der Tangente in  $P$ :

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

Da sich hieraus als Richtungskoeffizient  $-\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$  ergibt, so ist der Richtungskoeffizient der Normalen in  $P$  gleich  $\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}$ , und folglich deren Gleichung:

$$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} (x - x_1),$$

oder symmetrischer:

$$(11) \quad a^2 \frac{x - x_1}{x_1} = b^2 \frac{y - y_1}{y_1}.$$

Setzt man  $y = 0$ , so findet man für den Achsenabschnitt  $ON$  den Wert:

$$ON = x_1 - \frac{b^2 x_1}{a^2} = \frac{c^2}{a^2} x_1,$$

oder:

$$(12) \quad ON = \varepsilon^2 x_1,$$

Daher ist:

$$(13) \quad F'N = c + \varepsilon^2 x_1 = \varepsilon(a + \varepsilon x_1) = \varepsilon r',$$

$$(14) \quad FN = c - \varepsilon^2 x_1 = \varepsilon(a - \varepsilon x_1) = \varepsilon r.$$

Daraus aber folgt:

$$(15) \quad F'N : FN = F'P : FP,$$

und es ist daher nach einem bekannten planimetrischen Satze die Normale die Winkelhalbierende der beiden Brennstrahlen.

Aufg. 1. Beweise aus den Richtungskoeffizienten der Normalen und der beiden Brennstrahlen durch direktes Berechnen (§ 24) der beiden Winkel  $\sphericalangle F'PN$  und  $\sphericalangle FPN$  die Gleichheit derselben.

Aufg. 2. Konstruiere die Normale in einem Punkte der Ellipse.

Aufg. 3. Konstruiere von einem Punkte außerhalb der Ellipse die beiden Tangenten mit Hilfe von Satz V und VI.

Aufg. 4. Von dem einen Brennpunkte einer als spiegelnd gedachten Ellipse mögen nach allen Richtungen hin Strahlen (der Wärme, des Lichtes oder des Schalles) ausgehen. Welchen Weg nehmen die an der Ellipse nach dem bekannten Reflexionsgesetze reflektierten Strahlen?

Aufg. 5. Die Tangente und die Normale in  $P$  mögen die  $x$ -Achse in  $T$  und  $N$  schneiden. Beweise, daß  $OT \cdot ON = c^2$  ist, und schliesse daraus, daß  $F, F', T, N$  harmonische Punkte sind.

Aufg. 6. Bestimme in Bezug auf  $F$  und  $F'$  zu jedem der Scheitel  $A$  und  $A'$  den vierten harmonischen Punkt  $A_1$ , resp.  $A_1'$  und zeige, daß der Schnittpunkt  $N$  einer jeden Normalen stets zwischen  $A_1$  und  $A_1'$  liegt. In welcher Beziehung stehen  $A_1$  und  $A_1'$  zu den Normalen in  $A$  und  $A'$ ?

Aufg. 7. Berechne das Stück  $MN$  — die sogenannte Subnormale von  $P$ .

Aufg. 8. Berechne das Stück  $PN$  — die sogenannte begrenzte Normale von  $P$  — mit Hilfe der exzentrischen Anomalie von  $P$  und zeige, daß  $PN = \frac{bb'}{a}$ , wo  $b'$  der zu  $OP$  konjugierte Halbmesser ist.

Aufg. 9. Berechne aus (11) den Achsenabschnitt  $ON'$  der Normalen mit der  $y$ -Achse.

Aufg. 10. Beweise mit Hilfe der vorhergehenden Aufgabe, daß  $PN' = \frac{ab'}{b}$  ist, und leite daraus die Sätze ab:

$$PN \cdot PN' = b'^2 \quad \text{und} \quad PN : PN' = b^2 : a^2 = \text{Konst.}$$

Aufg. 11. Bringe den Kosinus des in Aufg. 1 berechneten Winkels  $\sphericalangle FPN = \varphi$  mit Hilfe der exzentrischen Anomalie auf die Form  $\cos \varphi = \frac{b}{b'}$  und beweise daraus, daß die



Projektion der Normalen  $PN = \frac{bb'}{a}$  auf einen Brennstrahl konstant und zwar gleich dem Halbparameter  $p$  ist.

Aufg. 12. Beweise folgenden Satz: Eine Gerade schneidet die Ellipse, berührt sie oder liegt ganz außerhalb derselben, je nachdem der Fußpunkt des von einem Brennpunkte auf die Gerade gefällten Lotes innerhalb, auf der Peripherie oder außerhalb des umgeschriebenen Kreises liegt (vergl. § 33).

### § 52. Die Direktrix.

Man nennt die Polare eines Brennpunktes eine Direktrix der Ellipse. Ihre Gleichung erhalten wir aus:

$$\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = 1,$$

indem wir  $x_1 = c$ ,  $y_1 = 0$  setzen, demnach:

$$(1) \quad x = \frac{a^2}{c}.$$

In gleicher Weise existiert für den andern Brennpunkt eine Direktrix mit der Gleichung  $x = -\frac{a^2}{c}$ .

Die Direktrix des Brennpunktes  $F$  ist also, ebenso wie die von  $F'$ , eine Gerade, welche im Abstände  $\frac{a^2}{c} = \frac{a}{\varepsilon}$  vom Mittelpunkte auf der großen Achse senkrecht steht. Sie läßt sich daher leicht konstruieren.

Berechnet man für einen beliebigen Ellipsenpunkt  $P$  den Abstand  $PF$  von dem Brennpunkte  $F$  und den Abstand  $PQ$  von der zu  $F$  gehörigen Direktrix, so erhält man:

$$PF = r = a - \varepsilon x,$$

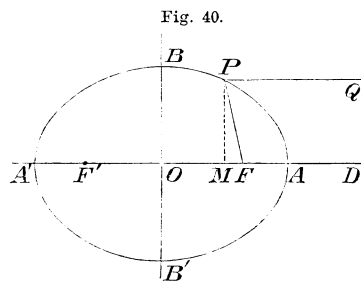
$$PQ = \frac{a}{\varepsilon} - x = \frac{1}{\varepsilon} (a - \varepsilon x),$$

folglich:

$$(2) \quad \frac{PF}{PQ} = \varepsilon,$$

d. h.:

I. Das Verhältnis der Abstände eines Punktes der Ellipse von einem Brennpunkte und der zugehörigen



Direktrix ist konstant und zwar gleich der numerischen Exzentrizität.

Für den andern Brennpunkt  $F'$  würden wir aus:

$$PF' = a + \varepsilon x \quad \text{und} \quad PQ' = \frac{a}{\varepsilon} + x = \frac{1}{\varepsilon} (a + \varepsilon x)$$

dasselbe Resultat  $\frac{PF'}{PQ'} = \varepsilon$  erhalten haben.

Die Polare eines beliebigen Punktes  $(x_1, y_1)$  der zu  $F$  gehörigen Direktrix hat, wegen  $x_1 = \frac{a^2}{c}$ , die Gleichung:

$$\frac{x}{c} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

und geht, wie auch aus der Gleichung zu erkennen ist, durch den Brennpunkt  $F$  (§ 50). Da aber der Richtungskoeffizient dieser Polaren gleich  $-\frac{b^2}{cy_1}$  ist, während die Verbindungslinie des Punktes  $(x_1, y_1)$  mit  $F$  den Richtungskoeffizienten  $\frac{cy_1}{b^2}$  besitzt, so folgt:

II. Die Verbindungslinie eines Brennpunktes mit dem Pole einer beliebigen durch ihn hindurchgehenden Sehne steht senkrecht auf dieser. Oder auch: Das zwischen dem Berührungspunkte und der Direktrix gelegene Stück einer Tangente wird von dem zugehörigen Brennpunkte aus unter einem rechten Winkel gesehen.

Aufg. 1. Welches ist die Direktrix des Kreises, und wie modifizieren sich für diesen die Sätze I und II?

Aufg. 2. Lege mit Hülfe von II von einem beliebigen Punkte der Direktrix die beiden Tangenten an die Ellipse.

Aufg. 3. Beweise, daß die Entfernung eines Brennpunktes von der zugehörigen Direktrix gleich  $\frac{p}{\varepsilon}$  ist. Daraus folgt dann, daß eine Ellipse vollständig bestimmt ist, wenn man einen Brennpunkt, die zugehörige Direktrix und die numerische Exzentrizität kennt (§ 41, Aufg. 6).

### § 53. Flächeninhalt der Ellipse.

Bezeichnet man den Flächeninhalt der Ellipse mit  $J$  und denjenigen des umgeschriebenen Kreises mit  $J'$ , so folgt

aus der Affinität beider Linien (§ 27) sofort  $J = \frac{b}{a} J'$ ,  
d. h.:

$$(1) \quad J = \pi ab.$$

Analoges gilt aber auch für jeden beliebigen Teil des Kreises und den entsprechenden Teil der Ellipse, also beispielsweise für einen beliebigen Kreissektor und den entsprechenden Ellipsensektor. Wenn daher irgend zwei Kreissektoren inhaltsgleich sind, so sind es auch die entsprechenden Ellipsensektoren. Oder wenn überhaupt der Kreis in irgend welcher Weise in  $n$  gleiche Teile geteilt wird, so wird von den entsprechenden Linien auch die Ellipse in  $n$  gleiche Teile geteilt. So wird beispielsweise der Kreis durch zwei auf einander senkrechte Durchmesser in vier gleiche Quadranten zerlegt und wir haben daher:

Die Ellipse wird durch je zwei konjugierte Durchmesser in vier inhaltsgleiche Teile geteilt.

Der letztere Satz folgt auch leicht aus der Symmetrie der Ellipse in Bezug auf konjugierte Durchmesser.

Formel (1) kann noch verallgemeinert werden, wenn man statt der auf einander senkrechten Halbachsen  $a, b$  zwei beliebige konjugierte Halbmesser  $a', b'$  und den zugehörigen Konjugationswinkel  $\omega$  als bekannt voraussetzt. Dafs dadurch eine Ellipse vollständig bestimmt ist, haben wir § 48, Aufg. 4 gesehen. Da nun  $ab = a'b' \sin \omega$  ist, so geht (1) über in:

$$(2) \quad J = \pi a' b' \sin \omega.$$

Aufg. 1. Bestimme den Inhalt einer Ellipse aus dem Halbparameter  $p$  und der numerischen Exzentrizität  $\varepsilon$ .

Aufg. 2. Bestimme den Inhalt einer Ellipse aus der grofsen Achse und der numerischen Exzentrizität.

Aufg. 3. Teile, von der grofsen Achse ausgehend, die Ellipse in 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10 inhaltsgleiche Teile.

Aufg. 4. Löse dieselbe Aufgabe von einem beliebigen Halbmesser ausgehend.

Aufg. 5. Berechne die Achsen und den Inhalt der Ellipse, für welche die beiden gleich grofsen konjugierten Durchmesser, deren Länge  $2a'$  sei, unter  $45^\circ$  gegen einander geneigt sind.

## Fünftes Kapitel.

## Die Hyperbel.

## § 54. Definition und Gleichung.

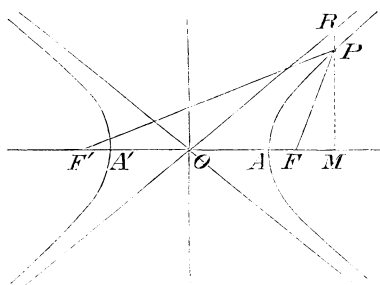
Die Hyperbel ist der Ort aller Punkte, für welche die Differenz der Abstände von zwei festen Punkten konstant ist.

Die beiden festen Punkte  $F$  und  $F'$  nennt man die Brennpunkte, ihren halben Abstand die Exzentrizität der Hyperbel. Die von irgend einem Punkte  $P$  der Hyperbel nach den Brennpunkten gezogenen Strahlen heißen Brennstrahlen.

Um die Gleichung der Hyperbel abzuleiten, wählen wir, wie bei der Ellipse,  $FF'$  als  $x$ -Achse und den Mittelpunkt von  $FF'$  als Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems. Es sei  $FF' = 2c$ ,  $PF = r$ ,  $PF' = r'$  und die konstante Differenz der beiden Brennstrahlen  $r$  und  $r'$  gleich  $2a$ . Aus  $PF' - PF < FF'$  folgt dann, daß  $a < c$  sein muß. Nun ist:

$$r = \sqrt{(c-x)^2 + y^2}, \quad r' = \sqrt{(c+x)^2 + y^2}.$$

Fig. 41.



Man erhält daher als Gleichung der Hyperbel:

$$(1) \quad \sqrt{(c-x)^2 + y^2} - \sqrt{(c+x)^2 + y^2} = 2a.$$

Wie bei der Ellipse findet man durch zweimaliges Quadrieren hieraus:

$$x^2(a^2 - c^2) + y^2a^2 - a^2(a^2 - c^2) = 0,$$

welche Gleichung sogar genau mit der entsprechenden Ellipsengleichung übereinstimmt. Da aber bei der Hyperbel  $a < c$  ist, müssen wir jetzt die Abkürzung:

$$(2) \quad c^2 - a^2 = b^2$$

benutzen und erhalten dann nach Division mit  $a^2 b^2$  die Gleichung der Hyperbel in der Form:

$$(3) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Wie bei der Ellipse schliessen wir aus dem Umstande, dass die Gleichung nur die Quadrate von  $x$  und  $y$  enthält, auf die Symmetrie der Hyperbel in Bezug auf die Koordinatenachsen. Während aber bei der Ellipse jede durch den Anfangspunkt  $O$  gehende Gerade  $y = \mu x$  die Kurve in zwei reellen, zu  $O$  symmetrisch gelegenen Punkten traf, begegnen wir bei der Hyperbel einer bemerkenswerten Abweichung. Auch hier erhält man zwar (indem man in (3)  $\mu x$  an die Stelle von  $y$  setzt) für die Abscissen der Schnittpunkte zwei entgegengesetzt gleiche Werte, nämlich:  $x = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2 \mu^2}}$ , aber diese sind nur dann reell, wenn  $b^2 - a^2 \mu^2 > 0$ , d. h. wenn  $\mu$ , absolut genommen, kleiner als  $\frac{b}{a}$  ist. Konstruiert man daher durch  $O$  die beiden zu den Achsen symmetrisch gelegenen Geraden  $y = +\frac{b}{a}x$  und  $y = -\frac{b}{a}x$ , so werden nur diejenigen Geraden die Hyperbel in reellen, zu  $O$  symmetrisch gelegenen Punkten treffen, welche in demselben Winkelraume liegen wie die  $x$ -Achse; diejenigen Geraden aber, welche den andern Winkelraum durchschneiden, haben keine reellen Punkte mit der Hyperbel gemein.

Man nennt jede durch  $O$  hindurchgehende Gerade einen Durchmesser der Hyperbel, unterscheidet dann aber, je nachdem die Schnittpunkte mit der Hyperbel reell sind oder nicht, zwischen reellen oder Hauptdurchmessern und imaginären oder Nebendurchmessern.

Der Punkt  $O$  heisst der Mittelpunkt der Hyperbel.

Aus der nach  $y$  aufgelösten Gleichung der Hyperbel:

$$(4) \quad y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

erkennt man, daß  $y$  nur dann reelle Werte erhält, wenn  $x$ , absolut genommen, größer als  $a$  ist. Legt man daher durch die beiden Punkte  $x = +a$  und  $x = -a$  der  $x$ -Achse zwei Parallelen zur  $y$ -Achse, so finden sich innerhalb dieses Parallelstreifens keine Punkte der Hyperbel. Für  $x = \pm a$  wird  $y = 0$ , die Hyperbel trifft daher die  $x$ -Achse in zwei Punkten  $A, A'$ , deren Entfernung gleich  $2a$  ist, und die folglich zwischen den beiden Brennpunkten sich befinden. Die Punkte  $A, A'$  heißen die Scheitel, ihre Verbindungslinie die Hauptachse der Hyperbel.

Läßt man  $x$  von  $x = a$  an wachsen (die Symmetrie der Hyperbel gestattet die Beschränkung der Diskussion auf positive Werte von  $x$ ), so nimmt auch  $y$  immer grössere Werte an. Für  $x = c$  erhält man die beiden entgegengesetzt gleichen, zum Brennpunkte  $F$  gehörigen Ordinaten  $\pm \frac{b^2}{a}$ . Auch hier setzt man zur Akürzung:

$$(5) \quad p = \frac{b^2}{a}$$

und nennt  $p$  den Halbparameter der Hyperbel.

Läßt man  $x$  über alle Grenzen wachsen, so wächst auch  $y$  über alle Grenzen. Dabei zeigt sich aber ein merkwürdiges Verhalten. Schreibt man nämlich (4) in der Form:

$$(6) \quad y = \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2}$$

und berücksichtigt, daß bei wachsendem  $x$  der Quotient  $\frac{a}{x}$  sich immer mehr der Null nähert, so ergibt sich, daß die beiden, zu demselben  $x$  gehörigen, entgegengesetzt gleichen Ordinaten der Hyperbel sich immer weniger und weniger unterscheiden von den beiden, zu dem gleichen  $x$  gehörigen Ordinaten  $y = \frac{b}{a} x$  und  $y = -\frac{b}{a} x$ , welche den oben besprochenen geraden Linien zukommen. Es wird daher (indem wir uns für den Augenblick auf den ersten Quadranten allein beschränken) die zu einem  $x$  gehörige Ordinatendifferenz  $PR$  mit wachsenden  $x$  immer kleiner und kleiner werden, sodaß sich der Hyperbelast immer mehr und mehr der Geraden  $y = \frac{b}{a} x$  nähert, ohne sie jedoch jemals zu erreichen.

Nach allem diesem erhalten wir jetzt folgende Vorstellung von dem Verlaufe der Hyperbel. Dieselbe besteht aus zwei vollständig von einander getrennten, zur  $y$ -Achse symmetrisch gelegenen Teilen. Der eine Teil liegt rechts von der Geraden  $x=a$  und vollständig eingeschlossen von den beiden symmetrisch zur  $x$ -Achse gelegenen Geraden  $y = +\frac{b}{a}x$  und  $y = -\frac{b}{a}x$ . Er beginnt in dem Punkte  $x=a$  der  $x$ -Achse und steigt symmetrisch zu der letzteren nach beiden Seiten auf, sich immer mehr und mehr jenen beiden Geraden anschließend, ohne dieselben jedoch wirklich zu erreichen. Einen analogen Verlauf nimmt der zweite Teil der Hyperbel, der vom Punkte  $x=-a$  der  $x$ -Achse an aufsteigend sich ebenfalls immer mehr und mehr jenen beiden Geraden anschließt. Man nennt diese die Asymptoten der Hyperbel; ihre Gleichungen sind:

$$(7) \quad y = \frac{b}{a}x \quad \text{und} \quad y = -\frac{b}{a}x,$$

oder auch:

$$(8) \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0.$$

Für  $b=a$  stehen die beiden Asymptoten aufeinander senkrecht, ihre Gleichungen lauten dann einfacher  $x-y=0$  und  $x+y=0$ . Man nennt diese spezielle Hyperbel, deren Gleichung sich in der Form  $x^2 - y^2 = a^2$  darstellt, eine gleichseitige.

Aufg. 1. Man konstruiere die Hyperbel, für welche  $a=2$ ,  $c=3$  ist.

Aufg. 2. Zeige, daß jede Parallele zur Hauptachse die Hyperbel in zwei reellen Punkten trifft.

Aufg. 3. Finde die Brennpunkte der Hyperbel:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

und zeichne ihre Asymptoten.

Aufg. 4. Wie heißt die Gleichung der Hyperbel mit der Hauptachse  $2a$  und dem Halbparameter  $p$ ?

Aufg. 5. Bestimme die Endpunkte der durch  $y=\mu x$  und  $y=-\mu x$  dargestellten Durchmesser und diskutiere das Resultat.

Aufg. 6. Berechne und konstruiere aus je zweien der vier Größen  $a, b, c, p$  die beiden andern. (Beachte § 40, Aufg. 9.)

Aufg. 7. Bei der Ellipse ist stets  $a \geq b$ . Besteht diese Bedingung auch bei der Hyperbel?

Aufg. 8. Von einer Hyperbel kennt man die Asymptoten und die Scheitel. Man konstruiere die Brennpunkte.

Aufg. 9. Welche Kurve wird durch die Gleichung:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

dargestellt?

§ 55. Polargleichung der Hyperbel, bezogen auf den  
Mittelpunkt.

Ein beliebiger Punkt  $P$  der Hyperbel:

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

habe die rechtwinkligen Koordinaten  $x, y$  und die Polarkoordinaten  $r, u$ .

Setzt man alsdann in (1):

$$(2) \quad x = r \cos u, \quad y = r \sin u,$$

so erhält man die auf den Mittelpunkt bezogene Polargleichung der Hyperbel:

$$(3) \quad \frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2 u}{a^2} - \frac{\sin^2 u}{b^2},$$

die man auch in der Form:

$$(4) \quad r^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2 u - a^2 \sin^2 u}$$

schreiben kann.

Berücksichtigt man  $\sin^2 u = 1 - \cos^2 u$  und  $a^2 + b^2 = c^2$ , so erhält man hieraus:

$$(5) \quad r^2 = \frac{a^2 b^2}{c^2 \cos^2 u - a^2}.$$

Man bedient sich, wie bei der Ellipse, der Bezeichnung:

$$(6) \quad \frac{c}{a} = \varepsilon, \quad (\varepsilon > 1),$$



und nennt, im Gegensatze zu der linearen Exzentrizität  $c$ , die Gröfse  $\varepsilon$  die numerische Exzentrizität. Die Polargleichung der Hyperbel nimmt jetzt die Form an:

$$(7) \quad r^2 = \frac{b^2}{\varepsilon^2 \cos^2 u - 1},$$

welche sich nur durch das Vorzeichen von der entsprechenden Ellipsengleichung unterscheidet (§ 41).

Aus (5) ersieht man, dafs der Halbmesser  $r$  für  $u = 0$  seinen kleinsten Wert, nämlich  $a$ , erhält und dafs  $r$  mit wachsendem  $u$  ebenfalls zunimmt. Während aber bei der Ellipse  $r$  immer endlich bleibt, wächst bei der Hyperbel der Halbmesser über alle Grenzen, je mehr sich  $u$  dem durch die Gleichung:

$$c^2 \cos^2 u - a^2 = 0,$$

oder

$$(8) \quad b^2 \cos^2 u - a^2 \sin^2 u = 0$$

definierten Werte von  $u$  nähert. Läßt man daher  $u$  von  $u = 0$  an wachsen, so wird  $r$  unendlich grofs, sobald:

$$(9) \quad \operatorname{tg} u = \frac{b}{a}$$

wird. Nimmt  $u$  weiter zu, so wird  $r^2$  negativ, also  $r$  imaginär, bis:

$$(10) \quad \operatorname{tg} u = -\frac{b}{a}$$

geworden ist. Für diesen Wert wird  $r$  wieder unendlich grofs und nimmt dann mit wachsendem  $u$  allmählich ab, bis es für  $u = 180^\circ$  wieder den kleinsten Wert, nämlich  $a$ , erreicht.

Da durch (9) und (10) die Asymptoten bestimmt werden, so sieht man, dafs diese als Durchmesser zu bezeichnen sind, welche die Hyperbel im Unendlichen treffen.

Die beiden Asymptoten der Hyperbel trennen die Durchmesser mit reellen Schnittpunkten — die Hauptdurchmesser — von denen, welche keine reellen Schnittpunkte ergeben — den Nebendurchmessern —. Zu den letzteren gehört insbesondere die  $y$ -Achse. Es ist nun für manche Untersuchungen vorteilhaft, auch diesen Nebendurchmessern in folgender Weise eine bestimmte Länge beizumessen. Für einen Nebendurchmesser

ist  $r^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2 u - a^2 \sin^2 u}$  eine negative Gröfse. Man kann daher vom Anfangspunkte  $O$  aus auf dem zu  $u$  gehörigen Nebendurchmesser vorwärts und rückwärts die Strecke  $\varrho = \sqrt{-r^2}$  abtragen und gelangt so zu zwei ganz bestimmten, zu  $O$  symmetrisch gelegenen Punkten  $Q$  und  $Q'$ . Für einen jeden dieser Punkte gilt dann die Gleichung:

$$\varrho^2 = -r^2,$$

und folglich (Gl. (3)):

$$(11) \quad \frac{1}{\varrho^2} = \frac{\sin^2 u}{b^2} - \frac{\cos^2 u}{a^2}.$$

Führt man aber für  $\varrho \cos u$  und  $\varrho \sin u$  die rechtwinkligen Koordinaten  $x$  und  $y$  von  $Q$  ein, so geht (11) über in:

$$(12) \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Daraus folgt, dafs der Ort der Punkte  $Q$  und  $Q'$  ebenfalls eine Hyperbel ist. Die Hauptachse derselben fällt in die  $y$ -Achse, ihre Scheitel  $B$  und  $B'$  sind vom Mittelpunkte  $O$  um  $b$  entfernt und ihre Exzentrizität ist gleich  $\sqrt{a^2 + b^2}$ , d. h. gleich derjenigen der gegebenen Hyperbel. Dadurch ist die zweite Hyperbel vollständig bestimmt. Sie wird die konjugierte Hyperbel der gegebenen genannt. Man nennt überdies  $BB'$  die Nebenachse der gegebenen Hyperbel und dementsprechend  $AA'$  die Nebenachse der konjugierten.

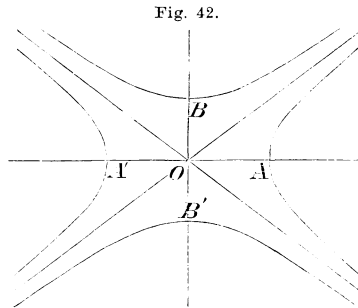


Fig. 42.

Konjugierte Hyperbeln haben dieselben Asymptoten und stehen in der Beziehung zu einander, dafs die Nebendurchmesser der einen die Hauptdurchmesser der andern sind.

Aufg. 1. Entscheide, ob der zu der Geraden:

$$2x - 7y + 1 = 0$$

parallele Durchmesser der Hyperbel  $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$  ein Hauptdurchmesser oder ein Nebendurchmesser ist.

Aufg. 2. Berechne die numerische Exzentrizität der Hyperbel  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ .

Aufg. 3. Beweise die Gleichungen:

$$a = \frac{p}{\varepsilon^2 - 1}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}},$$

wo  $p$  den Halbparameter bedeutet.

Aufg. 4. Drücke  $b, c, p$  durch  $a$  und  $\varepsilon$  aus.

Aufg. 5. Welchen Wert hat  $\varepsilon$  für die gleichseitige Hyperbel? Welches ist die konjugierte Hyperbel derselben?

Aufg. 6. Berechne den Asymptotenwinkel  $w$  aus der numerischen Exzentrizität. Man findet:

$$\cos \frac{w}{2} = \frac{1}{\varepsilon}, \quad \sin \frac{w}{2} = \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{\varepsilon} \text{ etc.}$$

Aufg. 7. Beweise, daß zwei Hyperbeln mit derselben numerischen Exzentrizität einander ähnlich sind. Beachte insbesondere die Gleichheit der Asymptotenwinkel.

Aufg. 8. Es sei  $r$  ein reeller Halbmesser einer Hyperbel und  $r'$  der dazu senkrechte reelle Halbmesser der konjugierten Hyperbel. Beweise die Gleichung  $\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r'^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}$  (§ 41).

Aufg. 9. Beweise, daß die gemeinsamen Asymptoten zweier konjugierter Hyperbeln die Diagonalen des durch die Scheitel  $A, A', B, B'$  bestimmten Rechtecks sind.

Aufg. 10. Zeige, daß die vier Brennpunkte zweier konjugierter Hyperbeln auf einem um  $O$  beschriebenen Kreise liegen.

Aufg. 11. Beweise mittels des Ausdrucks:

$$\varrho^2 \left( \frac{\cos^2 u}{a^2} - \frac{\sin^2 u}{b^2} \right) - 1 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1,$$

daß die Hyperbel alle Punkte der Ebene, für welche:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1$$

positiv ist, von denen trennt, für welche dieser Ausdruck negativ ist. Zu welchem Gebiete gehören Mittelpunkt und Brennpunkte?

## § 56. Die Hyperbel und die Gerade.

Um die Schnittpunkte der Geraden:

$$(1) \quad y = \mu x + n$$

mit der Hyperbel:

$$(2) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

zu bestimmen, setze man den durch (1) gelieferten Wert von  $y$  in (2) ein. Man erhält dann die quadratische Gleichung:

$$(3) \quad x^2(b^2 - a^2\mu^2) - 2\mu na^2x - a^2(b^2 + n^2) = 0.$$

Bezeichnet man die beiden Wurzeln derselben mit  $x_1$  und  $x_2$  und berechnet aus (1) die zugehörigen  $y_1$  und  $y_2$ , so folgt zunächst, daß die Hyperbel, ebenso wie die Ellipse, von jeder Geraden in zwei Punkten geschnitten wird. Die Realität derselben hängt von dem Vorzeichen der Diskriminante ab, die sich in der Form  $a^2b^2(n^2 + b^2 - a^2\mu^2)$  darstellt. Je nachdem dieser Ausdruck positiv, Null, oder negativ ist, sind die Wurzeln von (3) reell und verschieden, reell und zusammenfallend, oder imaginär. Nehmen wir zunächst an, es sei  $b^2 - a^2\mu^2 > 0$ , d. h.  $\mu^2 < \frac{b^2}{a^2}$ . Dann ist die Gerade (1) einem Hauptdurchmesser parallel, und die Diskriminante zeigt, daß dann allemal zwei reelle und von einander verschiedene Schnittpunkte existieren. Sind die Abscissen derselben  $x_1$  und  $x_2$ , so folgt aus (3), daß  $x_1x_2$  negativ ist, daß also die Schnittpunkte auf verschiedenen Seiten der  $y$ -Achse liegen, d. h. daß die Gerade beide Hyperbeläste trifft.

Ist  $b^2 - a^2\mu^2 < 0$ , d. h.  $\mu^2 > \frac{b^2}{a^2}$ , so läuft die Gerade (1) einem Nebendurchmesser parallel, und die Schnittpunkte sind reell und verschieden, reell und zusammenfallend, oder imaginär, je nachdem  $n^2 \geq a^2\mu^2 - b^2$  ist. Im ersteren Falle liegen dann aber die beiden Schnittpunkte stets auf demselben Hyperbelaste, da, wie Gleichung (3) zeigt, das Produkt  $x_1x_2$  positiv ausfällt.

Ist endlich  $b^2 - a^2\mu^2 = 0$ , also  $\mu^2 = \frac{b^2}{a^2}$ , so ist die Ge-

rade einer der beiden Asymptoten parallel. In diesem Falle reduziert sich die quadratische Gleichung (3) auf die lineare:

$$(4) \quad 2\mu nx + b^2 + n^2 = 0,$$

welche eine einzige Wurzel:

$$(5) \quad x = -\frac{b^2 + n^2}{2\mu n}$$

liefert.

Eine jede zu einer der Asymptoten parallele Gerade trifft daher die Hyperbel scheinbar in nur einem Punkte, welcher ins Unendliche rückt, wenn außer  $b^2 - a^2\mu^2 = 0$  auch noch  $n = 0$  ist, d. h. wenn die Gerade (1) mit einer der beiden Asymptoten zusammenfällt.

Man kann den durch  $b^2 - a^2\mu^2 = 0$  charakterisierten Fall aber noch in anderer Weise deuten. Betrachtet man nämlich in einer quadratischen Gleichung  $Ax^2 + 2Bx + C = 0$  die Koeffizienten  $A, B, C$  als veränderliche Größen und bringt die beiden Wurzeln:

$$x_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - AC}}{A} = \frac{(-B + \sqrt{B^2 - AC})(B + \sqrt{B^2 - AC})}{A(B + \sqrt{B^2 - AC})}$$

und:

$$x_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - AC}}{A} = \frac{(-B - \sqrt{B^2 - AC})(B - \sqrt{B^2 - AC})}{A(B - \sqrt{B^2 - AC})}$$

auf die Form:

$$x_1 = \frac{-C}{B + \sqrt{B^2 - AC}}, \quad x_2 = \frac{-C}{B - \sqrt{B^2 - AC}},$$

so erkennt man, daß für  $A = 0$  die Wurzel  $x_2$  unendlich groß wird, während  $x_1$  den Wert  $\frac{-C}{2B}$  annimmt. Wird dann auch noch  $B = 0$ , so erhält man auch für  $x_1$  einen unendlich großen Wert, und es sind dann die beiden Wurzeln  $x_1$  und  $x_2$  einander gleich, da die Diskriminante  $B^2 - AC$  für  $A = B = 0$  verschwindet. Man kann dies so ausdrücken: Verschwindet in der quadratischen Gleichung:

$$Ax^2 + 2Bx + C = 0$$

der Koeffizient  $A$ , während  $B$  von Null verschieden ist, so hat die quadratische Gleichung eine endliche und eine unendlich große Wurzel. Verschwinden  $A$

und  $B$  gleichzeitig, so sind beide Wurzeln einander gleich und unendlich groß.

Wendet man diese Betrachtungen auf die quadratische Gleichung (3) für den Fall  $b^2 - a^2\mu^2 = 0$  an, so erkennt man, daß dieselbe eine endliche und eine unendlich große Wurzel besitzt, so lange  $n$  von Null verschieden ist. Sobald aber  $n = 0$  wird, werden beide Wurzeln einander gleich und unendlich groß, d. h.:

Jede zu einer Asymptote parallele Gerade trifft die Hyperbel in einem im Endlichen gelegenen und in einem unendlich fernen Punkte. Die beiden Asymptoten selbst schneiden die Hyperbel in zwei zusammenfallenden unendlich fernen Punkten und sind die einzigen Geraden dieser Art.

Dem entsprechend hat man die im ersten und im dritten Quadranten und ebenso die im zweiten und im vierten Quadranten befindlichen Hyperbeläste als im unendlich fernen Punkte der betreffenden Asymptote zusammenhängend anzusehen. Die Hyperbel hat also zwei unendlich entfernte Punkte, und die beiden Asymptoten sind als die Tangenten der Hyperbel in diesen unendlich fernen Punkten zu betrachten, insofern eine jede von ihnen mit der Hyperbel zwei zusammenfallende Punkte gemein hat.

Aufg. 1. Bestimme die Schnittpunkte der Geraden:

$$7x - 3y + 2 = 0$$

mit der Hyperbel  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{81} = 1$ .

Aufg. 2. Welche Beziehung muß zwischen  $A$ ,  $B$ ,  $C$  stattfinden, damit die Gerade  $Ax + By + C = 0$  die Hyperbel  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  berührt? Übertrage Aufg. 6 und 7, § 45, auf die Hyperbel.

Aufg. 3. Zeige, daß der Ort der Schnittpunkte zu einander senkrechter Tangenten der mit dem Radius  $\sqrt{a^2 - b^2}$  um den Mittelpunkt der Hyperbel beschriebene Kreis ist (§ 48, Aufg. 6).

Aufg. 4. Gibt es Tangenten, die einem Hauptdurchmesser parallel laufen?

9\*

Aufg. 5. Innerhalb welcher Grenzen bewegen sich die Richtungskoeffizienten sämtlicher Tangenten einer Hyperbel?

Aufg. 6. Ist  $b^2 - a^2\mu^2 < 0$ , so gehören zu jedem  $\mu$  zwei parallele Tangenten, deren Gleichungen:

$$y = \mu x \pm \sqrt{a^2\mu^2 - b^2}$$

sind. Ermittle ihre Berührungspunkte.

### § 57. Konjugierte Durchmesser.

Angenommen die Gerade:

$$(1) \quad y = \mu x + n$$

treffe die Hyperbel:

$$(2) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

in zwei reellen Punkten  $P_1$  und  $P_2$ , so sind die Abscissen  $x_1$  und  $x_2$  derselben die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$(3) \quad x^2(b^2 - a^2\mu^2) - 2\mu na^2x - a^2(b^2 + n^2) = 0.$$

Für die Abscisse  $x$  des Mittelpunktes der Sehne  $P_1P_2$  hat man daher:

$$(4) \quad x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\mu na^2}{b^2 - a^2\mu^2}.$$

Setzt man diesen Wert in (1) ein, so erhält man die Ordinate des Mittelpunktes von  $P_1P_2$ , nämlich:

$$(5) \quad y = \frac{nb^2}{b^2 - a^2\mu^2}.$$

Aus (5) und (4) folgt aber durch Division:

$$(6) \quad y = \frac{b^2}{\mu a^2} x,$$

eine Gleichung, welche  $n$  nicht mehr enthält und welche folglich zwischen den Koordinaten des Mittelpunktes einer jeden zur Geraden (1) parallelen Sehne besteht. Da aber (6) einen Durchmesser darstellt, so gilt der Satz:

I. Die Mittelpunkte paralleler Sehnen einer Hyperbel liegen auf einem Durchmesser.

Setzen wir  $\mu = \operatorname{tg} \alpha$ ,  $\frac{b^2}{\mu a^2} = \operatorname{tg} \beta$ , so besteht also zwischen

den Richtungskoeffizienten der parallelen Sehnen einerseits und des Ortes ihrer Mittelpunkte andererseits die Beziehung:

$$(7) \quad \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{b^2}{a^2}$$

oder:

$$(8) \quad \frac{\cos \alpha \cos \beta}{a^2} - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{b^2} = 0.$$

Die Symmetrie dieser Gleichungen in Bezug auf  $\alpha$  und  $\beta$  lehrt, daß, wenn die parallelen Sehnen unter dem Winkel  $\beta$  gegen die  $x$ -Achse geneigt sind, umgekehrt der Neigungswinkel des sie halbierenden Durchmessers gleich  $\alpha$  sein muß. Zwei Durchmesser, deren Richtungskoeffizienten der Gleichung (7) genügen, heißen konjugierte Durchmesser. Da zu jedem Durchmesser aus (7) ein konjugierter gefunden werden kann, so folgt:

II. Es giebt unendlich viele Paare von Durchmessern, in Bezug auf welche die Hyperbel in dem Sinne symmetrisch ist, daß jeder der beiden Durchmesser eines solchen Paares die Sehnen halbiert, die dem andern parallel sind. Das Produkt der Richtungskoeffizienten zweier konjugierter Durchmesser ist konstant.

Da  $\operatorname{tg} \alpha$  und  $\operatorname{tg} \beta$  immer dasselbe Zeichen haben, so sind  $\alpha$  und  $\beta$  entweder beide spitz oder beide stumpf. Für  $\alpha = 0$  ist  $\beta = 90^\circ$ , wächst  $\alpha$ , so nimmt  $\beta$  ab. Solange  $\operatorname{tg} \alpha < \frac{b}{a}$  ist, muß  $\operatorname{tg} \beta > \frac{b}{a}$  sein. Wird  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$ , so wird auch  $\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}$ , d. h.:

III. Zwei konjugierte Durchmesser durchschneiden stets denselben Quadranten. Ist der eine ein Hauptdurchmesser, so ist der andere ein Nebendurchmesser; dreht sich der eine im positiven Sinne, so kommt ihm der andere im negativen Sinne entgegen. Die Hauptachse und die Nebenachse sind die einzigen auf einander senkrecht stehenden konjugierten Durchmesser. Jede Asymptote ist aufzufassen als ein Paar zusammengefallener konjugierter Durchmesser.



Aufg. 1. Konstruiere die Achsen einer gezeichnet vorliegenden Hyperbel (§ 43).

Aufg. 2. Beachte, daß bei der Hyperbel zwei Paare konjugierter Durchmesser sich gegenseitig nicht trennen, während dies bei der Ellipse stets der Fall ist.

Aufg. 3. Bei der Ellipse gab es einen Spezialfall, den Kreis, bei welchem je zwei konjugierte Durchmesser auf einander senkrecht stehen. Existiert ein solcher Spezialfall auch für die Hyperbel?

Aufg. 4. Es sei  $(x_1, y_1)$  ein Punkt der Hyperbel, also  $xy_1 - yx_1 = 0$  die Gleichung des zugehörigen Durchmessers. Beweise, daß der konjugierte Durchmesser die Gleichung:

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 0$$

besitzt. Bestimme hieraus die Koordinaten seiner Schnittpunkte mit der konjugierten Hyperbel. Man findet  $\pm \frac{a}{b} y_1$  und  $\pm \frac{b}{a} x_1$ .

Aufg. 5. Es seien  $a'$  und  $b'$  zwei konjugierte Halbmesser. Um die Vorstellungen zu fixieren, nehmen wir an, sie seien beide im ersten Quadranten gelegen. Sind dann  $x_1, y_1$  die Koordinaten des Endpunktes von  $a'$ , so sind (Aufg. 4)  $\frac{a}{b} y_1, \frac{b}{a} x_1$  die Koordinaten des Endpunktes von  $b'$ . Beweise hieraus die Relation  $a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2$  (vergl. § 48).

Aufg. 6. Beweise, daß der Inhalt des durch  $a'$  und  $b'$  bestimmten Dreiecks (§ 10) gleich  $\frac{1}{2}ab$ , also konstant ist.

Aufg. 7. Der von  $a'$  und  $b'$  eingeschlossene Winkel — der sogenannte Konjugationswinkel — sei  $\omega$ . Zeige, daß:

$$a'b' \sin \omega = ab$$

ist.

Aufg. 8. Zeige, daß, wenn  $a'$  wächst, auch  $b'$  wachsen muß und daß dann der Konjugationswinkel abnimmt. In den Asymptoten fallen  $a'$  und  $b'$  zusammen;  $\omega$  ist dann Null, und  $a'$  und  $b'$  sind unendlich groß.

Aufg. 9. Gibt es auch bei der Hyperbel gleich große konjugierte Durchmesser?

Aufg. 10. Zeige, daß die Asymptoten der Hyperbel

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  zusammenfallen mit den beiden gleichen konjugierten Durchmessern der Ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  (§ 48).

Aufg. 11. Löse die Aufgaben 4 bis 10 speziell für die gleichseitige Hyperbel. Zeige, daß für diese stets  $\alpha + \beta = 90^\circ$  ist.

§ 58. Die Gleichung der Hyperbel, bezogen auf zwei konjugierte Durchmesser als schiefwinklige Koordinatenachsen.

Unter dem Winkel  $\alpha$  gegen die  $x$ -Achse werde ein Hauptdurchmesser gezogen. Seine Länge sei  $2a'$ . Der unter dem Winkel  $\beta$  gegen die  $x$ -Achse geneigte konjugierte Nebendurchmesser hat dann ebenfalls eine bestimmte Länge  $2b'$  und es ist (§ 55):

$$(1) \quad \frac{\cos^2 \alpha}{a^2} - \frac{\sin^2 \alpha}{b^2} = \frac{1}{a'^2},$$

$$(2) \quad -\left(\frac{\cos^2 \beta}{a^2} - \frac{\sin^2 \beta}{b^2}\right) = \frac{1}{b'^2}.$$

Wählt man jetzt die beiden Durchmesser als  $x'$ -Achse, resp.  $y'$ -Achse eines neuen schiefwinkligen Koordinatensystems, so erhält man durch genau dieselbe Rechnung wie bei der Ellipse:

$$(3) \quad \frac{x'^2}{a'^2} - \frac{y'^2}{b'^2} = 1$$

als Gleichung der Hyperbel, bezogen auf die konjugierten Durchmesser  $2a'$  und  $2b'$ .

Aufg. Beweise, daß für die gleichseitige Hyperbel, wegen  $a = b$ ,  $\alpha + \beta = 90^\circ$ ,  $a' = b'$ , stets die Gleichung:

$$x'^2 - y'^2 = a'^2$$

gilt, für je zwei konjugierte Durchmesser als Koordinatenachsen.

§ 59. Die Tangente in einem Punkte der Hyperbel.

Die auf die beiden konjugierten Durchmesser  $2a'$  und  $2b'$  bezogene Gleichung der Hyperbel sei:

$$(1) \quad \frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 1.$$

Betrachten wir, wie früher, die Tangente in einem Punkte  $P_1$  der Hyperbel als die Grenzlage der Sekante  $P_1 P_2$ , wenn

$P_2$  mit  $P_1$  zusammengefallen ist, so erhalten wir durch genau dieselbe Rechnung, die wir bei der Ellipse ausführlich entwickelt haben, indem wir einfach überall  $b'^2$  mit  $-b'^2$  vertauschen, als Gleichung der Tangente im Punkte  $P_1$ :

$$(2) \quad \frac{xx_1}{a'^2} - \frac{yy_1}{b'^2} = 1.$$

Aufg. 1. Bringe die auf die Hauptachse bezogene Tangentengleichung  $\frac{xx_1}{a'^2} - \frac{yy_1}{b'^2} = 1$  auf die Normalform. Berechne den Abstand des Mittelpunktes und der Brennpunkte von der Tangente im Punkte  $(x_1, y_1)$ .

Aufg. 2. Bestimme die Achsenabschnitte der Tangente  $\frac{xx_1}{a'^2} - \frac{yy_1}{b'^2} = 1$ .

Aufg. 3. Führe die ganze im § 56 besprochene Untersuchung durch, unter Voraussetzung der auf konjugierte Durchmesser bezogenen Gleichung  $\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 1$  der Hyperbel. Zeige insbesondere, daß für  $b'^2 - a'^2 \mu^2 = 0$  die Gerade  $y = \mu x + n$  die Hyperbel in einem im Endlichen und in einem im Unendlichen gelegenen Punkte trifft. Leite daraus weiter ab, daß, bezogen auf jedes Paar konjugierter Durchmesser, die Gleichungen der beiden Asymptoten:

$$\frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{x}{a'} - \frac{y}{b'} = 0$$

sind.

Aufg. 4. Transformiere (§ 58) die auf rechtwinklige Achsen bezogenen Asymptotengleichungen:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$$

auf die konjugierten Durchmesser  $2a'$  und  $2b'$  und verifiziere dadurch die Behauptung der vorhergehenden Aufgabe.

Aufg. 5. Beachte, daß das Produkt der beiden Asymptotengleichungen sich in der Form  $\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 0$  darstellt und daß daher die in der vorhergehenden Aufgabe geforderte Transformation schon im § 58 gelöst ist.

Aufg. 6. Beweise, daß die Asymptoten die Diagonalen des Parallelogramms sind, welches man erhält, wenn man

durch die Endpunkte zweier konjugierter Durchmesser Parallelen zu diesen zieht (Verallgemeinerung von Aufg. 9, § 55).

Aufg. 7. Von einer Hyperbel kennt man, nach Lage und Größe, zwei konjugierte Durchmesser  $2a'$  und  $2b'$ . Konstruiere die Asymptoten und die Achsen.

Aufg. 8. Bringe die Gleichung der Tangente auf die Form  $y = \frac{b'}{a'} x \sqrt{1 + \frac{b'^2}{y_1^2}} - \frac{b'^2}{y_1}$  und leite daraus die Gleichungen der beiden Asymptoten (als Tangenten der beiden unendlich fernen Punkte) ab.

### § 60. Tangenten und Durchmesser.

Ersetzt man in dem gleichnamigen, auf die Ellipse bezüglichen Paragraphen 46 überall  $b'^2$  durch  $-b'^2$ , so wird man durch genau dieselbe Rechnung zu den folgenden Sätzen geführt:

I. Die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers sind dem konjugierten Durchmesser und folglich auch einander parallel.

II. Zwei beliebige Tangenten der Hyperbel treffen sich stets in einem Punkte desjenigen Durchmessers, welcher die Verbindungslinie ihrer Berührungspunkte halbiert.

Benutzt man die gleiche Bezeichnung wie in § 46, so lehrt auch bei der Hyperbel die Gleichung  $OT_1 = \frac{a'^2}{x_1}$ , daß die Punkte  $Q$ ,  $Q'$ ,  $M_1$ ,  $T_1$  harmonische Punkte sind.

III. Die zu irgend einem Paare Supplementar-sehnen parallelen Durchmesser sind konjugiert.

IV. Die Diagonalen eines jeden der Hyperbel umgeschriebenen Parallelogramms sind konjugierte Durchmesser.

Dabei ist unter einem umgeschriebenen Parallelogramm ein solches zu verstehen, dessen Seiten die Hyperbel berühren.

Bezieht man endlich die Hyperbel auf einen beliebigen Durchmesser  $2a'$  als  $x$ -Achse und die in dem einen Endpunkte von  $2a'$  konstruierte Tangente als  $y$ -Achse, so erhält man, wie

bei der Ellipse, indem man in der Hyperbelgleichung  $y$  ungeändert läßt und  $x$  durch  $x + a'$  ersetzt, die Gleichung:

$$(1) \quad y^2 = 2 \frac{b'^2}{a'} x + \frac{b'^2}{a'^2} x^2.$$

Für den Fall rechtwinkliger Koordinaten hat man  $a' = a$ ,  $b' = b$ ,  $\frac{b^2}{a} = p$  und erhält daher als Scheitelgleichung:

$$(2) \quad y^2 = 2px + \frac{p}{a} x^2.$$

Aufg. 1. Ist  $\delta$  der Abstand des Mittelpunktes  $O$  von der Tangente im Punkte  $P$ , ist ferner  $OP = a'$  und der konjugierte Halbmesser  $OQ = b'$ , so ergibt sich aus dem Dreiecke  $OPQ$  (§ 57, Aufg. 6) die Relation:  $\delta = \frac{ab}{b'}$ . Beweise hieraus den in § 56, Aufg. 3 enthaltenen Satz.

Aufg. 2. Konstruiere in den Endpunkten eines Durchmessers die Tangenten an die Hyperbel und in den Endpunkten des konjugierten Durchmessers die Tangenten an die konjugierte Hyperbel und zeige, daß das so entstehende Parallelogramm konstanten Inhalt hat.

#### § 61. Die Asymptoten als Koordinatenachsen.

Von den beiden symmetrisch zu den Achsen gelegenen Asymptoten der Hyperbel:

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

schliesse die durch den ersten Quadranten gehende mit der  $x$ -Achse den Winkel  $\varphi$  ein; dann bildet die andere Asymptote mit der  $x$ -Achse den Winkel  $-\varphi$ . Wählt man diese letztere Asymptote zur  $x'$ -Achse, die erstere zur  $y'$ -Achse eines schiefwinkligen Koordinatensystems, so gelten für den Übergang von dem alten rechtwinkligen zu diesem neuen schiefwinkligen Systeme die Transformationsformeln:

$$(2) \quad \begin{aligned} x &= (x' + y') \cos \varphi \\ y &= (-x' + y') \sin \varphi, \end{aligned}$$

welche man erhält, wenn man in den entsprechenden Formeln von § 15  $\alpha$  und  $\beta$  resp. durch  $-\varphi$  und  $\varphi$  ersetzt. Führt man aber (2) in (1) ein und berücksichtigt die Gleichungen:

$$(3) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}, \quad \cos \varphi = \frac{a}{c}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{c},$$

so erhält man die auf die Asymptoten, als Koordinatenachsen, bezogene Gleichung der Hyperbel:

$$(4) \quad x'y' = \frac{c^2}{4}.$$

Das System der beiden Asymptoten ist immer ein schiefwinkliges, mit Ausnahme der gleichseitigen Hyperbel, bei welcher die Asymptoten auf einander senkrecht stehen.

Aufg. 1. Für den Asymptotenwinkel  $w = 2\varphi$  ist  $\sin w = \frac{2ab}{c^2}$ . Beweise daraus, daß der Flächeninhalt des Parallelogramms, welches ein beliebiger Hyperbelpunkt mit den beiden Asymptoten bestimmt, konstant und gleich  $\frac{ab}{2}$  ist.

Aufg. 2. Bestimme die Abschnitte, welche die Tangente in einem beliebigen Punkte mit den Asymptoten bildet, und gründe darauf eine Tangentenkonstruktion.

Aufg. 3. Beweise aus (4), daß die Hyperbel sich den Asymptoten immer mehr und mehr nähert, ohne sie je zu erreichen.

Aufg. 4. Wende die Gleichungen (2) auf  $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$  an. Man erhält alsdann  $\frac{x'}{2x_1} + \frac{y'}{2y_1} = 1$  als Tangentengleichung, bezogen auf die Asymptoten ( $x', y'; x_1, y_1$  bedeuten die neuen Koordinaten der Punkte  $x, y; x_1, y_1$ ).

Aufg. 5. Zeige, daß die Gleichung

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c^2} \frac{1}{x + \frac{d}{c}}$$

eine Hyperbel darstellt, deren Asymptoten den Koordinatenachsen parallel sind.

## § 62. Beziehungen zwischen den Sehnen und Tangenten einer Hyperbel und ihren Asymptoten.

Die auf die Asymptoten bezogene Gleichung der Hyperbel sei:

$$(1) \quad xy = \frac{c^2}{4}.$$

Um die Schnittpunkte der Geraden:

$$(2) \quad \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

mit der Hyperbel zu bestimmen, berechnen wir aus (1) etwa  $y$  und führen diesen Wert in (2) ein. Man gelangt dann zu der quadratischen Gleichung:

$$(3) \quad 4qx^2 - 4pqx + c^2p = 0,$$

deren Diskriminante gleich  $4pq(pq - c^2)$  ist.

Die Wurzeln und damit auch die Schnittpunkte der Geraden mit der Hyperbel sind daher immer reell und von einander verschieden, sobald

$p$  und  $q$  entgegengesetztes Zeichen haben oder sobald, bei gleichen Zeichen von  $p$  und  $q$ , das Produkt  $pq > c^2$  ist.

Bezeichnet man für diesen Fall die beiden reellen Schnittpunkte mit  $S_1$  und  $S_2$ , ihre Koordinaten mit  $x_1, y_1$  und  $x_2, y_2$ , so erhält man aus (3) für die Koordinaten  $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ ,  $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$  des Mittelpunktes der Sehne  $S_1S_2$  die Werte:

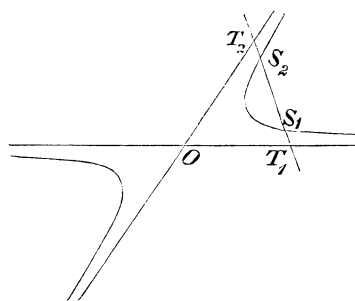
$$(4) \quad x = \frac{p}{2}, \quad y = \frac{q}{2}.$$

Dies sind aber auch die Koordinaten des Mittelpunktes des zwischen den Koordinatenachsen, d. h. den Asymptoten befindlichen Stückes der Geraden (2), und es gilt daher der Satz:

I. Schneidet eine Gerade die Hyperbel in den Punkten  $S_1$  und  $S_2$ , ihre Asymptoten in den Punkten  $T_1$  und  $T_2$ , so ist der Mittelpunkt der Sehne  $S_1S_2$  zugleich der Mittelpunkt des Segmentes  $T_1T_2$ , und es ist daher  $S_1T_1 = S_2T_2$  und  $S_1T_2 = S_2T_1$ .

Dieser Satz gestattet eine einfache Konstruktion der Hyperbel, wenn man ihre Asymptoten und einen Hyperbelpunkt  $S_1$  kennt. Man ziehe nämlich durch  $S_1$  eine beliebige Gerade, welche die Asymptoten in  $T_1$  und  $T_2$  treffen möge, und trage  $S_1T_1$  von  $T_2$  aus auf der Geraden ab. Indem man

Fig. 43.



dies beliebig oft wiederholt, erhält man beliebig viele Punkte der Hyperbel, von denen natürlich jeder wieder in der gleichen Weise benutzt werden kann wie  $S_1$ .

Ist in (3)  $pq = c^2$ , so fallen die beiden Schnittpunkte  $S_1$  und  $S_2$  zusammen, und die Gerade (2) wird zur Tangente. Aus (3) und (2) ergeben sich dann für die Tangente mit den Achsenabschnitten  $p$ ,  $q$  die Koordinaten des Berührungspunktes:

$$(5) \quad x = \frac{p}{2}, \quad y = \frac{q}{2},$$

die man natürlich auch aus (4) hätte entnehmen können. Man hat daher den Satz, der als spezieller Fall von I. angesehen werden kann:

II. Das zwischen den Asymptoten befindliche Stück einer Hyperbeltangente wird im Berührungspunkte halbiert.

Aus (5) erhält man auch sofort die Gleichung der Tangente im Punkte  $(x_1, y_1)$ . Da nämlich die Achsenabschnitte  $2x_1$  und  $2y_1$  sein müssen, so lautet diese Gleichung:

$$(6) \quad \frac{x}{2x_1} + \frac{y}{2y_1} = 1 \quad (\S 61, \text{Aufg. 4}).$$

Da die Achsenabschnitte  $p$  und  $q$  einer Tangente stets das konstante Produkt  $pq = 4x_1y_1 = c^2$  ergeben, so folgt:

III. Jede Tangente einer Hyperbel bestimmt mit den Asymptoten derselben ein Dreieck von dem konstanten Inhalte  $ab$ .

Der Inhalt eines solchen Dreiecks ist nämlich:

$$\frac{1}{2}pq \sin w = \frac{1}{2} \cdot c^2 \cdot \frac{2ab}{c^2} = ab,$$

insofern  $w$  den Asymptotenwinkel bedeutet (§ 55, Aufg. 6).

Aufg. 1. Konstruiere im Punkte  $(x_1, y_1)$  der Hyperbel die Tangente mittels der Relationen  $2x_1 = p$ ,  $2y_1 = q$ .

Aufg. 2. Eine Gerade bewege sich so, daß das Dreieck, welches sie mit den Schenkeln eines festen Winkels bildet, konstanten Inhalt hat. Welchen Ort beschreibt der Mittelpunkt der in Bewegung befindlichen Dreiecksseite?

Aufg. 3. Von einer Hyperbel kennt man eine Asymptote und drei Punkte. Man soll die Hyperbel und die andere



Asymptote konstruieren, indem man auf die durch die drei Punkte bestimmten Sehnen den Satz I anwende.

Aufg. 4. Beweise mit Hilfe von § 59, Aufg. 6, daß das zwischen den Asymptoten befindliche Stück einer Tangente gleich dem zu dieser Tangente parallelen Durchmesser ist.

Aufg. 5. Beweise, daß die Koordinaten des Mittelpunktes der zu dem Durchmesser  $y = \mu x$  parallelen Sehne gleich  $\frac{n}{2\mu}$  und  $\frac{n}{2}$  sind, und zeige daraus, daß  $y = -\mu x$  der zu  $y = \mu x$  konjugierte Durchmesser ist. Insbesondere sind  $y = x$  und  $y = -x$  die Gleichungen der Achsen.

Aufg. 6. Beweise, daß die Tangenten in den Punkten  $(x_1, y_1)$  und  $(x_2, y_2)$  sich in dem Punkte  $(\frac{2x_1x_2}{x_1+x_2}, \frac{2y_1y_2}{y_1+y_2})$  treffen und daß dieser auf dem die Berührungssehne halbierenden Durchmesser liegt.

Aufg. 7. Eine Gerade  $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$  bewege sich so, daß sie fortwährend die Hyperbel  $xy = \frac{c^2}{4}$  berühre. Welchen Ort beschreibt der Punkt  $P$ , welcher das zwischen den Asymptoten befindliche Stück  $T_1T_2$  der beweglichen Tangente in dem konstanten Verhältnisse  $\frac{T_1P}{PT_2} = \lambda$  teilt?

Aufg. 8. Zwei Hyperbeln mögen dieselben Asymptoten, aber verschiedene Exzentrizitäten besitzen. Ihre auf die gemeinsamen Asymptoten bezogenen Gleichungen seien:

$$xy = \frac{c_1^2}{4} \quad \text{und} \quad xy = \frac{c_2^2}{4}.$$

Ein beliebiger Durchmesser treffe die erste Hyperbel in  $P_1$ , die zweite in  $P_2$ , dann sind die Tangenten in  $P_1$  und  $P_2$  parallel.

Aufg. 9. Beweise, daß Hyperbeln mit denselben Asymptoten dieselbe numerische Exzentrizität besitzen und demnach ähnlich (und ähnlich gelegen) sind.

Aufg. 10. Bestimme die Koordinaten der Brennpunkte und der Scheitel der Hyperbel  $xy = \frac{c^2}{4}$ , wenn der Asymptotenwinkel gleich  $w$  ist. Drücke  $a$  und  $b$  durch  $c$  und  $w$  aus.

Aufg. 11. Von einer Hyperbel kennt man die Asympto-

ten und die auf dieselben bezogenen Koordinaten eines ihrer Punkte. Man bestimme die Gleichung der Hyperbel und die Größen  $a$  und  $b$ .

### § 63. Pol und Polare.

Die auf zwei konjugierte Durchmesser  $2a'$  und  $2b'$  bezogene Gleichung der Hyperbel lautet:

$$\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 1.$$

Genau wie bei der Ellipse (§ 49) und durch genau dieselbe Rechnung (indem man nur überall  $-b'^2$  statt  $b'^2$  schreibt) findet man den Satz:

I. Zieht man von einem beliebigen Punkte Strahlen nach einer Hyperbel und bestimmt jedesmal zu den beiden Schnittpunkten und dem gegebenen Punkte, als zugeordnetem, den vierten harmonischen Punkt, so ist der Ort dieser vierten harmonischen Punkte eine gerade Linie.

Die Gleichung dieser Geraden lautet:

$$\frac{xx_1}{a'^2} - \frac{yy_1}{b'^2} = 1.$$

Sie heißt die Polare des gegebenen Punktes, dieser der Pol der Geraden.

Bezeichnet man einen beliebigen Punkt der Ebene als außerhalb der Hyperbel liegend, wenn man durch ihn Gerade ziehen kann, welche die Hyperbel nicht treffen, dagegen innerhalb der Hyperbel, wenn keine solchen Geraden gezogen werden können, so gelten genau dieselben Betrachtungen und alle die Sätze, die wir in den Paragraphen 49 und 50 für die Ellipse hergeleitet haben, in unveränderter Weise auch für die Hyperbel. Wir empfehlen, als eine nützliche Übung, dem Leser, alle diese Sätze für die Hyperbel von neuem abzuleiten und namentlich auch die in den betreffenden Paragraphen befindlichen Aufgaben auf die Hyperbel anzuwenden.

Hier möge nur noch der folgende Satz erwähnt werden:

II. Die Polare eines Punktes einer Asymptote ist dieser parallel; sie fällt mit ihr zusammen, wenn der Punkt der unendlich ferne Punkt der Asymptote ist.

Aufg. 1. Man konstruiere mit Hülfe des vollständigen Vierecks zu einem gegebenen Punkte die Polare.

Aufg. 2. Man bestimme die Koordinaten des Poles der Geraden  $Ax + By + C = 0$  in Bezug auf die Hyperbel  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

Aufg. 3. Man konstruiere zu einer gegebenen Geraden den Pol.

Aufg. 4. Man beweise durch direkte Rechnung die Richtigkeit von Satz II. Man hat zu diesem Zwecke nur zu zeigen, daß der Richtungskoeffizient der Polaren von  $(x_1, y_1)$  gleich  $\pm \frac{b}{a}$  ist, sobald  $y_1 = \pm \frac{b}{a} x_1$  ist.

#### § 64. Brennpunkteigenschaften.

Für die zu einem beliebigen Punkte  $P$  der Hyperbel:

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

gehörigen Brennstrahlen  $r$  und  $r'$  hatten wir gefunden:

$$(2) \quad r^2 = (c - x)^2 + y^2, \quad r'^2 = (c + x)^2 + y^2.$$

Durch Subtraktion folgt:

$$(r' + r)(r' - r) = 4cx,$$

und da  $r' - r = 2a$  ist:

$$r' + r = 2 \frac{c}{a} x = 2\varepsilon x,$$

wo  $\varepsilon$  die numerische Exzentrizität bedeutet.

Aus  $r' + r = 2\varepsilon x$  und  $r' - r = 2a$  folgt dann:

$$(3) \quad r = \varepsilon x - a, \quad r' = \varepsilon x + a.$$

Durch Multiplikation von  $r$  und  $r'$  erhält man:

$$rr' = \varepsilon^2 x^2 - a^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2} x^2 - a^2 = \frac{b^2 x^2}{a^2} + x^2 - a^2,$$

oder mit Berücksichtigung der Hyperbelgleichung:

$$(4) \quad rr' = \frac{b^2 x^2}{a^2} - \frac{a^2 y^2}{b^2}.$$

Aus § 57, Aufg. 5 folgt aber, daß die rechte Seite gleich  $b'^2$  ist, wenn  $b'$  der zu  $OP$  konjugierte Halbmesser ist.

Wir erhalten daher, wie bei der Ellipse, die Gleichung:

$$(5) \quad rr' = b'^2,$$

d. h.: I. Das Produkt der Brennstrahlen eines Punktes ist gleich dem Quadrate des zu dem Punkte gehörigen konjugierten Halbmessers.

Um die Abstände  $d$  und  $d'$  der Brennpunkte von der Tangente im Punkte  $(x_1, y_1)$  zu ermitteln, hat man die Gleichung der Tangente:

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

auf die Normalform zu bringen und dann die Koordinaten der Brennpunkte einzuführen. Man erhält:

$$d = - \frac{\frac{cx_1}{a^2} - 1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}}} = -b \frac{\varepsilon x_1 - a}{\sqrt{\frac{b^2 x_1^2}{a^2} + \frac{a^2 y_1^2}{b^2}}},$$

$$d' = - \frac{-\frac{cx_1}{a^2} - 1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}}} = +b \frac{\varepsilon x_1 + a}{\sqrt{\frac{b^2 x_1^2}{a^2} + \frac{a^2 y_1^2}{b^2}}},$$

oder mit Rücksicht auf (3), (4) und (5):

$$(6) \quad d = - \frac{br}{b'}, \quad d' = + \frac{br'}{b'},$$

wenn  $r$  und  $r'$  die Brennstrahlen des Berührungspunktes und  $b'$  der zu dem Radius Vektor desselben konjugierte Halbmesser sind. Daraus folgt zunächst mit Berücksichtigung von (5):

$$(7) \quad dd' = -b^2,$$

in Worten:

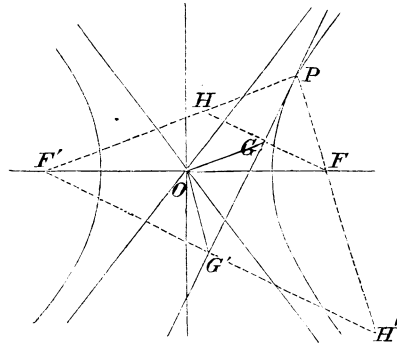
II. Das Produkt der Abstände der Brennpunkte von einer Tangente der Hyperbel ist konstant und zwar gleich dem Quadrate der halben Nebenachse.

Das negative Vorzeichen deutet an, daß die Brennpunkte immer auf verschiedenen Seiten der Tangente liegen, während sie bei der Ellipse sich stets auf derselben Seite befinden. Aus (6) folgt weiter (indem man nur noch die absoluten Längen in Betracht zieht):

$$(8) \quad \frac{d}{r} = \frac{d'}{r'}.$$

Daraus folgt aber die Ähnlichkeit der beiden Dreiecke  $PFG$  und  $PF'G'$  und mithin die Gleichheit der Winkel  $\sphericalangle FPG$  und  $\sphericalangle F'PG'$ , d. h.:

Fig. 44.



III. Die Tangente halbiert den Winkel der beiden Brennstrahlen.

Die in  $P$  auf der Tangente errichtete Senkrechte heisst die Normale der Hyperbel im Punkte  $P$ . Sie halbiert den Nebenwinkel der beiden Brennstrahlen (vergl. § 51).

Wie bei der Ellipse zeigt jetzt eine einfache planimetrische Überlegung, dass die Gegenpunkte  $H$  und  $H'$ , welche man erhält, wenn man  $FG$  und  $F'G'$  um sich selbst verlängert, auf den Brennstrahlen von  $P$ , resp. den Verlängerungen derselben, liegen, woraus man leicht erhält:

$$(9) \quad F'H = FH' = 2a,$$

d. h.: IV. Der Ort der Gegenpunkte eines jeden der beiden Brennpunkte in Bezug auf eine bewegliche Tangente ist der mit dem Radius  $2a$  um den andern Brennpunkt beschriebene Kreis.

Ebenso findet man, wie bei der Ellipse, dass  $OG$  und  $OG'$  resp. zu  $F'H$  und  $FH'$  parallel und folglich gleich  $a$  sind. Man hat daher den Satz:

V. Der Ort der Fußpunkte der Lote, die man von den beiden Brennpunkten auf die sämtlichen Tangenten einer Hyperbel fallen kann, ist der mit dem Radius  $a$  um den Mittelpunkt der Hyperbel beschriebene Kreis. Oder auch: Die Hyperbel wird umhüllt von dem einen Schenkel eines rechten Winkels, dessen Scheitel einen festen Kreis durchläuft, während der andere Schenkel durch einen ausserhalb gelegenen festen Punkt hindurchgeht.

Aufg. 1. Beachte, daß die Gleichung  $r' - r = 2a$  den Brennstrahlen  $r$  und  $r'$  Vorzeichen zuweist, wie auch die Gleichungen (3) zeigen. Diskutiere mit Rücksicht hierauf die Gleichungen (6) und beachte § 14.

Aufg. 2. Leite die Gleichung der Normalen ab und zeige, daß die Gleichungen (12), (13), (14) von § 51 auch für die Hyperbel gelten. Beweise hieraus Satz III.

Aufg. 3. Konstruiere in einem Punkte der Hyperbel Tangente und Normale.

Aufg. 4. Konstruiere von einem Punkte außerhalb der Hyperbel die Tangenten mit Hülfe der Gegenpunkte.

Aufg. 5. Diskutiere die übrigen Aufgaben von § 51 für die Hyperbel, insbesondere Aufg. 12.

Aufg. 6. Beweise, daß der Abstand eines Brennpunktes von einer Asymptote gleich  $b$  ist (spezieller Fall von II).

Aufg. 7. Beweise, daß eine Ellipse und eine Hyperbel, welche dieselben Brennpunkte haben (konfokal sind), sich rechtwinklig schneiden, d. h. daß in einem Schnittpunkte die Tangente der einen Kurve die Normale der anderen ist.

### § 65. Die Direktrix.

Man nennt die Polare eines Brennpunktes eine Direktrix der Hyperbel. Ihre Gleichung erhält man aus:

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1,$$

indem man  $x_1 = c$ ,  $y_1 = 0$  setzt. Dies giebt:

$$(1) \quad x = \frac{a^2}{c}.$$

In gleicher Weise existiert für den andern Brennpunkt eine Direktrix mit der Gleichung  $x = -\frac{a^2}{c}$ .

Die Direktrix des Brennpunktes  $F$  ist also, ebenso wie die von  $F'$ , eine Gerade, welche im Abstände  $\frac{a^2}{c} = \frac{a}{\varepsilon}$  vom Mittelpunkte auf der Hauptachse senkrecht steht.

Berechnet man für einen beliebigen Hyperbelpunkt  $P$  den Abstand  $PF$  von dem Brennpunkte  $F$  und den Abstand  $PQ$  von der zugehörigen Direktrix, so erhält man:

10\*

$$PF = r = \varepsilon x - a,$$

$$PQ = x - \frac{a}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} (\varepsilon x - a),$$

folglich:

$$(2) \quad \frac{PF}{PQ} = \varepsilon,$$

d. h.: I. Das Verhältnis der Abstände eines Punktes der Hyperbel von einem Brennpunkte und der zu-

gehörigen Direktrix ist konstant und zwar gleich der numerischen Exzentrizität.

Für einen beliebigen Punkt  $(x_1, y_1)$  der zu  $F$  gehörigen Direktrix erhält man, wegen  $x_1 = \frac{a^2}{c}$ , als Gleichung der Polaren:

$$\frac{x}{c} - \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

Durch Vergleichung des Richtungskoeffizienten dieser Polaren mit demjenigen der Verbindungslinie des Punktes  $(x_1, y_1)$  mit  $F$  findet man, wie bei der Ellipse, den Satz:

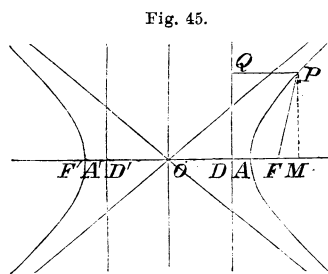
II. Die Verbindungslinie eines Brennpunktes mit dem Pole einer beliebigen durch ihn hindurchgehenden Sehne steht senkrecht auf dieser. Oder auch: Das zwischen dem Berührungspunkte und der Direktrix gelegene Stück einer Tangente wird von dem zugehörigen Brennpunkte aus unter einem rechten Winkel gesehen.

Aufg. 1. Bestimme die Direktrix der gleichseitigen Hyperbel.

Aufg. 2. Konstruiere mit Hülfe von II die beiden Tangenten, die man von einem Punkte der Direktrix an die Hyperbel legen kann.

Aufg. 3. Beweise, daß die Entfernung eines Brennpunktes von der zugehörigen Direktrix gleich  $\frac{p}{\varepsilon}$  ist, wo  $p$  den Halbparameter bedeutet.

Aufg. 4. Von einer Hyperbel sind gegeben ein Brennpunkt, die zugehörige Direktrix und die numerische Exzentrizität.



zität  $\varepsilon$ . Man soll daraus die Hyperbel konstruieren (§ 55, Aufg. 3).

Aufg. 5. Konstatiere, daß für einen der Hyperbel nicht angehörigen Punkt das Verhältnis der Abstände von einem Brennpunkte und der zugehörigen Direktrix ein anderes ist, als für die Hyperbelpunkte.

## Sechstes Kapitel.

### Die Parabel.

#### § 66. Definition und Gleichung.

Die Parabel ist der Ort der Punkte, die von einem gegebenen Punkte und einer gegebenen Geraden gleichen Abstand haben.

Der gegebene Punkt heißt der Brennpunkt, die gegebene Gerade die Direktrix oder Leitlinie der Parabel.

Um die Gleichung der Parabel abzuleiten, wähle man die Mitte des von dem Brennpunkte  $F$  auf die Direktrix gefällten Lotes  $FG = p$  zum Anfangspunkte eines rechtwinkligen Koordinatensystems und die Richtung von  $OF$  als die positive Richtung der  $x$ -Achse. Die Abscissen von  $F$  und  $G$  sind dann resp.  $\frac{p}{2}$  und  $-\frac{p}{2}$ . Sei nun der Punkt  $P$  mit den Koordinaten  $x, y$  gleich weit von dem Brennpunkte und der Direktrix entfernt, also  $PF = PL$ , dann folgt aus der Figur:

$$PF^2 = FM^2 + MP^2 = \left(\frac{p}{2} - x\right)^2 + y^2$$

und:

$$PL = PN + NL = x + \frac{p}{2},$$

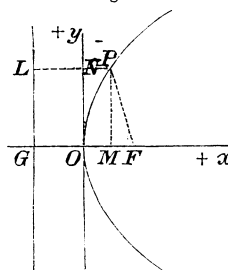
also:

$$\left(\frac{p}{2} - x\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2,$$

oder:

$$(1) \quad y^2 = 2px.$$

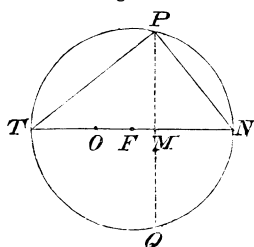
Fig. 46.





Dies ist die Gleichung der Parabel. Sie wird durch die Koordinaten  $(0, 0)$  des Anfangspunktes befriedigt; die Parabel geht also durch  $O$  hindurch, wie auch aus der Definition unmittelbar folgt. Da ferner nur für positive  $x$  sich reelle  $y$  aus der Gleichung ergeben, so liegt die Kurve ganz auf der rechten Seite der  $y$ -Achse. Jedem positiven  $x$  aber entsprechen zwei entgegengesetzt gleiche  $y$ , d. h. die Parabel liegt symmetrisch zur  $x$ -Achse. Diese Symmetrieachse wird die Achse, ihr Anfangspunkt  $O$  der Scheitel der Parabel genannt. Wächst  $x$  über alle Grenzen, so wird auch  $y$  unendlich groß. Für  $x = \frac{p}{2}$  erhalten wir aus der Parabelgleichung die beiden zum Brennpunkte gehörigen Ordinaten  $y = \pm p$ . Wie bei der Ellipse und der Hyperbel bezeichnet man die Brennpunktsordinate  $p$  als den Halbparameter der Parabel. Dieser Halbparameter  $p$ , welcher zugleich die Entfernung des Brennpunktes von der Direktrix angiebt, bestimmt vollständig die Gestalt der Parabel.

Fig. 47.



Aus der Gleichung  $y^2 = 2px = 2x \cdot p$  folgt, daß  $y$  immer mittlere Proportionale zu  $2x$  und  $p$  ist. Dies führt auf eine einfache Konstruktion der Parabel. Trägt man nämlich die Abscisse  $OM = x$  von  $O$  aus nach links ab, sodaß

$MT = 2x$  ist und macht  $MN = p$ , so hat man nur über  $TN$  als Durchmesser einen Kreis zu beschreiben, welcher dann die in  $M$  auf  $TN$  errichtete Senkrechte in den beiden Parabelpunkten  $P$  und  $Q$  trifft, da  $MP^2 = MT \cdot MN$  ist. Der Mittelpunkt dieses Kreises hat die Abscisse:

$$\frac{(x + p) - x}{2} = \frac{p}{2}$$

und ist daher der Brennpunkt  $F$  der Parabel, was die Konstruktion noch vereinfacht.

Aufg. 1. Die Parabel ist der Ort der Mittelpunkte aller Kreise, die durch einen gegebenen Punkt gehen und eine gegebene Gerade berühren.

Aufg. 2. Die Entfernung des Brennpunktes vom Scheitel einer Parabel sei gleich 3, wie heisst ihre Gleichung?

Aufg. 3. Für die Punkte der Parabel mit dem Halbparameter  $p$  ist  $y^2 - 2px = 0$ . Für welche Punkte der Ebene ist die linke Seite positiv, für welche negativ?

Aufg. 4. Wo liegen die Punkte  $(2, 3)$ ;  $(-1, 2)$ ;  $(3, -1)$ ;  $(\frac{2}{3}, -3)$  in Bezug auf die Parabel  $y^2 = 5x$ .

Aufg. 5. Wie gross ist der Halbparameter der Parabel  $y^2 - 5x = 0$ , wie weit sind Scheitel und Brennpunkt von einander entfernt?

Aufg. 6. Verschiebe das Koordinatensystem parallel zu sich selbst, sodass der Brennpunkt der neue Anfangspunkt wird. Wie heisst dann die Gleichung der Parabel?

Aufg. 7. Verlege in derselben Weise den Anfangspunkt nach dem Punkte  $(x_0, y_0)$  der Parabel und zeige, dass die Parabelgleichung in dem neuen Systeme  $y^2 + 2y_0y - 2px = 0$  lautet. Warum fehlt  $x_0$ ?

Aufg. 8. Von einer Parabel sind gegeben die Achse, der Scheitel und ein Punkt  $P$ . Man bestimme Halbparameter, Brennpunkt und Direktrix, mit Berücksichtigung der im Texte gegebenen Konstruktion.

Aufg. 9. Von einer Parabel kennt man die Achse, den Scheitel und einen Punkt  $(x_1, y_1)$ . Wie heisst ihre Gleichung?

Aufg. 10. Zeichne die Parabeln, deren Gleichungen  $y^2 = 3x$ ,  $y^2 = 5x$ ,  $y^2 = 6x$  sind.

Aufg. 11. Welche Kurve wird durch die Gleichung  $y^2 = -2px$  dargestellt? (§ 5, Aufg. 7.)

Aufg. 12. Welche Kurve wird durch die Gleichung  $x^2 = 2py$  dargestellt? (§ 5, Aufg. 7.)

Aufg. 13. Zeichne die Parabel  $y = x^2$  und bestimme ihren Brennpunkt und ihre Direktrix.

Aufg. 14. Bringe die Gleichung  $y = ax^2 + bx + c$  auf die Form  $y + \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$  und zeige, dass dadurch eine Parabel mit vertikaler Achse und dem Scheitel  $\left(-\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}, -\frac{b}{2a}\right)$  dargestellt wird.

## § 67. Die Parabel und die Gerade. Durchmesser.

Aus der Gleichung  $y^2 = 2px$  folgt, daß jede zur  $x$ -Achse parallele Gerade  $y = b$  die Parabel in einem einzigen Punkte schneidet, der die Koordinaten  $\frac{b^2}{2p}$ ,  $b$  besitzt.

Aus einem später anzugebenden Grunde nennt man eine jede solche zur Parabelachse parallele Gerade einen Durchmesser der Parabel.

Jede zur  $y$ -Achse parallele Gerade  $x = a$  (wo  $a$  positiv sei) trifft die Parabel in den beiden symmetrisch zur Achse gelegenen Punkten  $x = a$ ,  $y = \pm \sqrt{2pa}$ . Für  $x = 0$  fallen diese beiden Punkte mit dem Scheitel zusammen, sodaß die Gerade  $x = 0$ , d. h. die  $y$ -Achse, als die Tangente der Parabel im Punkte  $O$  zu betrachten ist. Sie wird die Scheiteltangente genannt.

Ist nun eine beliebige Gerade  $y = \mu x + b$  gegeben, wo  $\mu$  jetzt von Null verschieden sei, so erhalten wir die Schnittpunkte derselben mit der Parabel  $y^2 = 2px$  durch Kombination der beiden Gleichungen. Die Elimination von  $x$  führt zu der in  $y$  quadratischen Gleichung:

$$(1) \quad \mu y^2 - 2py + 2pb = 0.$$

Dieselbe zeigt, daß die Gerade die Parabel schneidet, berührt, oder keinen Punkt mit ihr gemein hat, je nachdem die Diskriminante  $p^2 - 2\mu bp$  positiv, Null, oder negativ ist.

Da  $p$  positiv ist, so wird  $p^2 - 2\mu bp = 2p\left(\frac{p}{2} - \mu b\right)$  positiv, Null, oder negativ sein, je nachdem  $\frac{p}{2}$  größer, gleich,

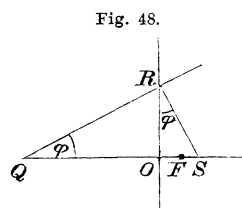


Fig. 48.

oder kleiner als  $\mu b$  ist. Errichtet man aber in dem Durchschnittspunkte  $R$  der Geraden mit der  $y$ -Achse die Senkrechte  $RS$ , so folgt:

$$\mu = \operatorname{tg} \varphi = \frac{OS}{OR},$$

d. h.  $OS = \mu b$ .

Andrerseits ist  $\frac{p}{2} = OF$  gleich der Entfernung des Scheitels vom Brennpunkte, und es folgt daher:

I. Eine beliebige Gerade schneidet die Parabel berührt sie, oder liegt ganz aufserhalb derselben, je nachdem die auf der Geraden in ihrem Schnittpunkte mit der Scheiteltangente errichtete Senkrechte die Parabelachse zwischen dem Scheitel und dem Brennpunkte, im Brennpunkte, oder jenseits des Brennpunktes trifft.

Angenommen, die Gerade  $y = \mu x + b$  treffe die Parabel in den beiden Punkten  $S_1$  und  $S_2$ , mit den Koordinaten  $x_1, y_1$  und  $x_2, y_2$ , dann sind  $y_1$  und  $y_2$  die beiden Wurzeln der Gleichung (1), und man erhält daher für die Ordinate des Mittelpunktes der Sehne  $S_1S_2$  den Wert:

$$(2) \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{p}{\mu}.$$

Dieser Ausdruck ist aber von  $b$  unabhängig. Konstruiert man daher sämtliche zu der Geraden  $y = \mu x + b$  parallelen Sehnen, indem man  $\mu$  unverändert läßt und  $b$  variiert, so erhält man für die Ordinate des Mittelpunktes einer jeden Sehne stets denselben Wert  $\frac{p}{\mu}$ , und es gilt daher der Satz:

II. In einer Parabel liegen die Mittelpunkte paralleler Sehnen auf einer zur Achse parallelen Geraden, d. h. auf einem Durchmesser.

Aufg. 1. Welche Lagen haben die Geraden  $4x - 2y + 7 = 0$ ,  $5x - y - 1 = 0$ ,  $18x - y + 1 = 0$ ,  $x + 2y + 6 = 0$ ,  $x + y - 1 = 0$  zur Parabel  $y^2 - 6x = 0$ ?

Aufg. 2. Bestimme für die Parabel  $y^2 - 3x = 0$  den Ort der Mittelpunkte der zu der Geraden  $3x - 7y + 2 = 0$  parallelen Sehnen. In welchem Punkte trifft dieser Ort die Parabel?

Aufg. 3. Gegeben ist die Parabel  $y^2 = \frac{7}{2}x$  und die Gleichung  $5y - 2 = 0$  eines Durchmessers. Wie heisst die Gleichung des Systems paralleler Sehnen, welche durch diesen Durchmesser halbiert werden?

Aufg. 4. Gegeben ist die Parabel  $y^2 = 8x$  und der Durchmesser  $y + 3 = 0$ . Wie heisst die Gleichung der durch den Punkt  $(5, 2)$  gehenden Sehne, welche durch jenen Durchmesser halbiert wird?



$x_1 = \frac{p}{2\mu^2}$ ,  $y_1 = \frac{p}{\mu}$  die Koordinaten des Berührungspunktes derselben sind. Umgekehrt gehört zu jedem Parabelpunkte  $(x_1, y_1)$  eine ganz bestimmte Tangente, deren Richtungskoeffizient  $\mu = \frac{p}{y_1}$  ist. Die Gleichung der Tangente im Punkte  $(x_1, y_1)$  lautet daher:

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1} (x - x_1),$$

oder:

$$yy_1 - y_1^2 = p(x - x_1).$$

Da aber:

$$y_1^2 = 2px_1$$

ist, so erhalten wir als Gleichung der Tangente im Punkte  $(x_1, y_1)$ :

$$(1) \quad yy_1 = p(x + x_1).$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich die Achsenabschnitte  $a$  und  $b$  der Tangente, nämlich:

$$a = OT_1 = -x_1,$$

$$b = OR_1 = \frac{px_1}{y_1} = \frac{y_1}{2},$$

d. h.: II. Die Tangente trifft die Achse in einem Punkte, der vom Scheitel ebenso weit entfernt ist, als der Fußpunkt der Ordinate des Berührungspunktes.

Daraus folgt dann von selbst, daß der Abschnitt auf der  $y$ -Achse halb so groß ist als diese Ordinate. Um also in einem beliebigen Punkte  $P_1$  der Parabel die Tangente zu konstruieren, trage man die Abscisse des Punktes  $P_1$  von  $O$  aus nach links ab und verbinde den so erhaltenen Punkt  $T_1$  mit  $P_1$ .

Fällt man von  $P_1$  auf die Direktrix das Lot  $P_1L_1$ , so ist  $P_1L_1 = P_1F$ . Da überdies  $OR_1 = \frac{1}{2}y_1$ ,  $GL_1 = y_1$  ist, so folgt, daß  $F$ ,  $R_1$ ,  $L_1$  in gerader Linie liegen und daß  $FR_1 = R_1L_1$  ist. Dann sind aber die Dreiecke  $FR_1P_1$  und  $L_1R_1P_1$  kongruent, woraus sich ergibt, daß die Winkel  $\sphericalangle FR_1P_1$  und  $\sphericalangle L_1R_1P_1$  einander gleich sind und daß  $FR_1$  auf der Tangente senkrecht steht, d. h.:

III. Die Tangente halbiert den Winkel, welchen der Brennstrahl und der Durchmesser des Berührungspunktes miteinander bilden.

IV. Der Fußpunkt des Lotes, welches man von dem Brennpunkte auf eine beliebige Tangente fällen kann, liegt stets auf der Scheiteltangente. Oder auch: Die Parabel wird umhüllt von dem einen Schenkel eines rechten Winkels, dessen Scheitel eine feste Gerade, die Scheiteltangente, durchläuft, während der andere Schenkel durch einen festen Punkt, den Brennpunkt, hindurchgeht.

Die im Berührungspunkte  $P_1$  auf der Tangente errichtete Senkrechte heißt die Normale der Parabel in  $P_1$ . Ihre Gleichung lautet:

$$(2) \quad y - y_1 = -\frac{y_1}{p} (x - x_1).$$

Für  $y = 0$  erhalten wir den Abschnitt auf der  $x$ -Achse, nämlich:

$$x = ON_1 = x_1 + p.$$

Daraus folgt:

$$(3) \quad M_1 N_1 = p.$$

Man nennt das zwischen der Ordinate und der Normale gelegene Stück der  $x$ -Achse die Subnormale des Punktes  $P_1$  und hat daher den Satz:

V. Bei der Parabel ist die Subnormale für alle Punkte konstant, nämlich gleich dem Halbparameter  $p$ .

Um von einem beliebigen Punkte  $(x_0, y_0)$  an die Parabel eine Tangente zu legen, hat man nur die Bedingung dafür auszudrücken, daß die durch  $(x_0, y_0)$  gehende Gerade  $y - y_0 = \mu(x - x_0)$  die Parabel in zwei zusammenfallenden Punkten trifft. Durch Elimination von  $x$  erhält man, wie in § 67, die in  $y$  quadratische Gleichung:

$$(4) \quad \mu y^2 - 2py + 2p(y_0 - \mu x_0) = 0,$$

welche die Ordinaten der Schnittpunkte der Geraden mit der Parabel liefert. Diese Schnittpunkte fallen zusammen, wenn die Diskriminante der quadratischen Gleichung verschwindet, d. h. wenn:

$$(5) \quad 2x_0\mu^2 - 2y_0\mu + p = 0$$

ist.

Da diese Gleichung in  $\mu$  quadratisch ist, so erhält man zwei Werte von  $\mu$ , welche reell und von einander verschieden, reell

und zusammenfallend, oder imaginär sind, je nachdem  $y_0^2 - 2px_0$  positiv, Null, oder negativ ist, d. h. es sind zwei Tangenten, eine, oder gar keine möglich, je nachdem der Punkt  $(x_0, y_0)$  außerhalb, auf, oder innerhalb der Parabel liegt (§ 66, Aufg. 3). Sollen insbesondere die beiden durch  $(x_0, y_0)$  gehenden Tangenten einen rechten Winkel mit einander einschließen, so müssen die beiden Wurzeln  $\mu_1$  und  $\mu_2$  von (5) der Relation  $\mu_1\mu_2 = -1$  genügen, d. h. es muß sein:

$$(6) \quad \frac{p}{2x_0} = -1 \quad \text{oder} \quad x_0 = -\frac{p}{2},$$

oder der Punkt  $(x_0, y_0)$  muß auf der Direktrix liegen. Umgekehrt erhält man für jeden Punkt der Direktrix die Relation  $\mu_1\mu_2 = -1$ , und es gilt daher der Satz:

VI. Der Ort der Punkte, von denen aus man zwei auf einander senkrechte Tangenten an eine Parabel legen kann, ist die Direktrix (§ 48, Aufg. 6).

Aufg. 1. Gegeben ist die Parabel  $y^2 = 11x$ . Beweise, daß die Gerade  $11x - 6y + 9 = 0$  die Parabel berührt, und bestimme die Koordinaten des Berührungspunktes.

Aufg. 2. Wie heißt für dieselbe Parabel die Gleichung der Tangente, welche der Geraden  $2x - 7y + 3 = 0$  parallel ist?

Aufg. 3. Konstruiere zu einer gegebenen Parabel die Tangente von gegebener Richtung und ihren Berührungspunkt.

Aufg. 4. Beweise, daß für die Parabel  $y = x^2$  die Gleichung der Tangente im Punkte  $(x_1, y_1)$  lautet:  $y + y_1 = 2xx_1$  (§ 5, Aufg. 7).

Aufg. 5. Von einer Parabel kennt man den Scheitel, die Scheiteltangente und einen Punkt  $P$ . Man soll mit Hilfe von Tangente, Normale und Subnormale den Brennpunkt bestimmen (Satz II und V).

Aufg. 6. Beweise, daß man die beiden Tangenten, die man von einem beliebigen Punkte  $P$  an die Parabel ziehen kann, dadurch konstruiert, daß man über der Verbindungslinie von  $P$  mit dem Brennpunkte als Durchmesser einen Kreis beschreibt und dessen Schnittpunkte mit der Scheiteltangente mit  $P$  verbindet.



Aufg. 7. Beweise mit Hilfe dieser Konstruktion den Satz VI des Textes geometrisch.

Aufg. 8. Von einer gezeichnet vorliegenden Parabel den Brennpunkt, die Achse und die Direktrix zu finden. (An-  
deutung: Mittels zweier paralleler Sehnen findet man einen Durchmesser und die Tangente im Endpunkte desselben. Satz III führt dann zu einer durch den Brennpunkt gehenden Geraden und eine Wiederholung der ganzen Konstruktion zum Brennpunkte selbst.)

### § 69. Anwendung schiefwinkliger Koordinaten.

Verschiebt man das rechtwinklige Koordinatensystem, auf welches sich die Parabelgleichung:

$$(1) \quad y^2 = 2px$$

bezieht, parallel mit sich selbst nach dem Parabelpunkte  $(x_0, y_0)$ , als neuen Anfangspunkte, und setzt dem entsprechend:

$$x = x_0 + x', \quad y = y_0 + y',$$

unter  $x', y'$  die neuen Koordinaten verstehend, so geht die Gleichung (1) über in:

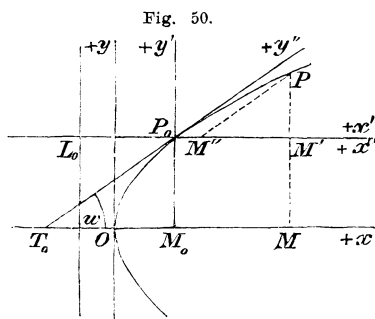
$$(2) \quad y'^2 + 2y_0y' - 2px' = 0$$

(§ 66, Aufg. 7).

Nunmehr wählen wir den durch  $P_0$  gehenden Durchmesser (die  $x'$ -Achse) zur Abscissenachse und die Tangente der Parabel in  $P_0$  zur Ordinatenachse eines schiefwinkligen Koordinatensystems. Ein beliebiger Parabelpunkt  $P$  habe die rechtwinkligen Koordinaten  $P_0M' = x', M'P = y'$  und die schiefwinkligen Koordinaten  $P_0M'' = x'', M''P = y''$ . Schließst dann die Tangente in  $P_0$  mit der alten  $x$ -Achse (und folglich auch mit der  $x'$ -Achse) den Winkel  $w$  ein, so ist zunächst:

$$\operatorname{tg} w = \frac{p}{y_0},$$

und es gelten die Transformationsformeln:



$$\begin{aligned}x' &= x'' + y'' \cos w, \\y' &= y'' \sin w,\end{aligned}$$

die man direkt aus der Figur abliest, die man aber auch aus § 15 erhalten kann, indem man dort  $\alpha = 0$ ,  $\beta = w$  setzt. Die Gleichung (2) geht dann über in:

$$y''^2 \sin^2 w + 2y_0 y'' \sin w - 2px'' - 2py'' \cos w = 0,$$

welche, wegen  $y_0 \sin w = p \cos w$ , zu:

$$(3) \quad y''^2 = 2 \frac{p}{\sin^2 w} \cdot x''$$

wird.

Nun folgt aus  $\operatorname{tg} w = \frac{p}{y_0}$ , daß  $\sin^2 w = \frac{p^2}{p^2 + y_0^2}$  und daher  $\frac{p}{\sin^2 w} = \frac{p^2 + y_0^2}{p} = p + \frac{y_0^2}{p} = p + 2x_0 = 2\left(x_0 + \frac{p}{2}\right)$ , d. h. gleich der doppelten Entfernung des Punktes  $P_0$  von der Direktrix ist. Bezeichnen wir diese doppelte Entfernung mit  $q$  und schreiben der Einfachheit halber  $x$  und  $y$  statt  $x''$  und  $y''$ , so lautet die auf das schiefwinklige Achsensystem (Durchmesser und zugehörige Tangente) bezogene Parabelgleichung:

$$(4) \quad y^2 = 2qx.$$

Kombinieren wir mit dieser Gleichung die auf dasselbe schiefwinklige Achsensystem bezogene Gleichung  $y = \mu x + b$  einer Geraden, so erhalten wir, wie in § 67, die quadratische Gleichung:

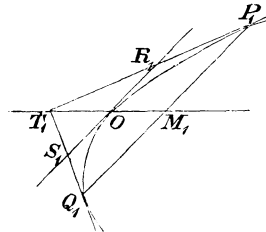
$$\mu y^2 - 2qy + 2qb = 0,$$

deren Wurzeln die Ordinaten der Schnittpunkte der Geraden mit der Parabel darstellen und die reell und verschieden, reell und zusammenfallend, oder imaginär sind, je nachdem  $\mu b$  kleiner, gleich, oder größer ist als  $\frac{q}{2}$ . Da sich ferner die Entwicklungen des § 68 wesentlich auf die Form der beiden Gleichungen  $y^2 = 2px$  und  $y = \mu x + b$  stützten, nicht aber auf den Umstand, daß zufällig das Achsensystem ein rechtwinkliges war, so haben wir in den Rechnungen, die auf die Gleichung der Tangente führten, einfach  $p$  mit  $q$  zu vertauschen und wir erhalten daher in unserm schiefwinkligen

Achsensysteme (dessen Anfangspunkt jetzt mit  $O$  bezeichnet werde) als Gleichung der Tangente im Punkte  $(x_1, y_1)$  die Gleichung:

$$(5) \quad yy_1 = q(x + x_1).$$

Fig. 51.



Für  $y = 0$  ergibt sich der Abschnitt der Tangente auf der  $x$ -Achse, nämlich:

$$x = OT_1 = -x_1.$$

Denselben Achsenabschnitt liefert aber auch der zu  $P_1$  symmetrisch gelegene Punkt  $Q_1$  mit den Koordinaten  $x_1, -y_1$ , sodafs sich der Satz ergibt:

Die Tangenten in den Endpunkten einer beliebigen Sehne der Parabel schneiden sich in einem Punkte desjenigen Durchmessers, welcher diese Sehne halbiert. Der Mittelpunkt der Sehne und der Schnittpunkt der beiden Tangenten liegen gleichweit vom Endpunkte des Durchmessers entfernt.

Aufg. 1. Von einer Parabel kennt man einen Durchmesser, die Tangente im Endpunkte desselben und auferdem noch einen Punkt. Man soll die Tangente in dem letzteren finden.

Aufg. 2. Gegeben ist eine Parabel und ein Punkt auferhalb derselben. Man konstruiere die beiden von dem Punkte an die Parabel gehenden Tangenten, mit Hülfe des durch den Punkt gehenden Durchmessers.

Aufg. 3. Die auf Achse und Scheiteltangente bezogene Parabelgleichung sei  $y^2 = 5x$ . Wie heift die Gleichung der Parabel, bezogen auf das durch Durchmesser und Tangente des Parabelpunktes  $(\frac{9}{5}, 3)$  gebildete schiefwinklige System?

Aufg. 4. Wie heift in diesem schiefwinkligen Systeme die Gleichung der Tangente, deren Berührungspunkt in dem ursprünglichen rechtwinkligen Systeme die Koordinaten  $\frac{4}{3}, -2$  hat?

## § 70. Pol und Polare.

Die auf einen Durchmesser und die Tangente im Endpunkte desselben bezogene Parabelgleichung sei:

$$(1) \quad y^2 = 2qx.$$

Zwei beliebige Punkte  $P_1$  und  $P_2$  mögen durch ihre auf dasselbe System bezogenen Koordinaten  $x_1, y_1$  und  $x_2, y_2$  gegeben sein. Irgend ein Punkt der Verbindungslinie  $P_1P_2$  hat dann die Koordinaten  $\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$ . Damit derselbe auf der Parabel liege, muß sein Teilverhältnis  $\lambda$  der Gleichung:

$$\left(\frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}\right)^2 = 2q \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},$$

genügen, welche man auch in der Form:

$$(2) \quad \lambda^2(y_2^2 - 2qx_2) + 2\lambda(y_1y_2 - q(x_1 + x_2)) + y_1^2 - 2qx_1 = 0$$

schreiben kann. Diese quadratische Gleichung liefert die beiden Teilverhältnisse  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ , welche den Schnittpunkten  $S_1$  und  $S_2$  der Geraden mit der Parabel entsprechen. Nun folgt, wie früher bei der Ellipse, daß die vier Punkte  $P_1, P_2, S_1, S_2$  allemal, aber auch nur dann, eine harmonische Gruppe bilden, wenn  $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$  ist, d. h. wenn die Gleichung:

$$(3) \quad y_1y_2 - q(x_1 + x_2) = 0$$

besteht.

Wählen wir daher zuerst den Punkt  $P_1$  als einen festen Punkt, so ist der Punkt  $P_2$  nur an die Bedingung geknüpft, daß seine Koordinaten der Gleichung:

$$(4) \quad yy_1 - 2q(x + x_1) = 0$$

genügen müssen. Diese Gleichung stellt aber eine gerade Linie dar, welche man die Polare des Punktes  $P_1$  nennt. In Bezug auf sie wird  $P_1$  der Pol genannt.

I. Zieht man demnach von einem beliebigen Punkte Strahlen nach einer Parabel und bestimmt jedesmal zu den beiden Schnittpunkten und dem gegebenen Punkte, als zugeordnetem, den vierten harmonischen Punkt, so ist der Ort dieser vierten harmonischen Punkte eine Gerade, deren Gleichung  $yy_1 = q(x + x_1)$  lautet.

Liegt  $P_1$  außerhalb der Parabel, so ergibt sich durch eine einfache Überlegung, daß die Polare die Berührungsehne ist.

Auch die übrigen Sätze, die wir früher kennen gelernt haben, wiederholen sich ohne irgend welche Schwierigkeit bei der Parabel, sodaß wir uns darauf beschränken können, sie kurz zusammen zu stellen:

II. Die Tangente ist die Polare ihres Berührungspunktes, dieser der Pol der Tangente.

III. Den Punkten einer Punktreihe entsprechen als Polaren die Strahlen eines Strahlenbüschels, und umgekehrt.

IV. Die Polaren der Punkte eines Durchmessers sind einander parallel, treffen sich also in einem unendlich fernen Punkte — dem Pole dieses Durchmessers.

Setzt man speziell ein rechtwinkliges Koordinatensystem (Parabelachse und Scheiteltangente) voraus, so heißt die Gleichung der Polaren des Punktes  $(x_1, y_1)$ :

$$yy_1 = p(x + x_1).$$

Für  $x_1 = \frac{p}{2}$ ,  $y_1 = 0$  findet man hieraus  $x = -\frac{p}{2}$ , d. h.:

V. Die Polare des Brennpunktes ist die Direktrix.

Die Polare eines Punktes  $P_1$  der Direktrix lautet wegen  $x_1 = -\frac{p}{2}$ :

$$yy_1 = px - \frac{p^2}{2}.$$

Sie geht durch den Brennpunkt und hat den Richtungskoeffizienten  $\frac{p}{y_1}$ . Da nun die Verbindungslinie von  $P_1$  mit dem Brennpunkte den Richtungskoeffizienten  $-\frac{y_1}{p}$  besitzt, so ergibt sich, wie bei der Ellipse und der Hyperbel, der Satz:

VI. Die Verbindungslinie des Brennpunktes mit dem Pole einer beliebigen durch ihn hindurchgehenden Sehne steht senkrecht auf dieser.

Aufg. 1. Beweise die Sätze II, III, IV sorgfältig an Hand der für die Ellipse ausführlich gegebenen Entwicklungen.

Aufg. 2. Man überzeuge sich, daß die Sätze über Pol und Polare unabhängig von dem gewählten Koordinatensysteme sind.

Aufg. 3. Beweise, daß der Pol der Geraden:

$$ax + by + c = 0$$

in Bezug auf die Parabel  $y^2 = 2qx$  die Koordinaten  $x_1 = \frac{c}{a}$ ,  
 $y_1 = -\frac{b}{a}q$  besitzt.

Aufg. 4. Bestimme den Pol der Geraden:

$$5x - 7y + 2 = 0$$

in Bezug auf die Parabel  $y^2 - 3x = 0$ .

Aufg. 5. Bestimme die Koordinaten der Berührungspunkte der beiden Tangenten, die man vom Punkte  $(-5, 3)$  an die Parabel  $y^2 - 8x = 0$  ziehen kann. (Benutze die Polare des gegebenen Punktes.)

Aufg. 6. Konstruiere die Polare eines Punktes in Bezug auf die Parabel mit Hilfe des vollständigen Vierecks.

Aufg. 7. Beachte, daß der Richtungskoeffizient der Polaren  $yy_1 = q(x + x_1)$  nur von der Ordinate des Poles abhängt, und beweise daraus Satz IV.

### § 71. Flächeninhalt eines Parabelsegmentes.

Um den Flächeninhalt eines Parabelsegmentes zu bestimmen, welches eine beliebige Sehne  $P_1Q_1$  (vergl. Fig. 51) abschneidet, konstruiere man in  $P_1$  und  $Q_1$  die Tangenten, welche sich in  $T_1$  schneiden mögen, sowie die zu  $P_1Q_1$  parallele Tangente, deren Berührungspunkt  $O$  sei. Dann folgt aus  $OT_1 = OM_1$  und  $R_1S_1 = \frac{1}{2}P_1Q_1$ , daß der Inhalt des der Parabel eingeschriebenen Dreiecks  $OP_1Q_1$  doppelt so groß ist, als der Inhalt des zugehörigen umgeschriebenen Dreiecks  $R_1S_1T_1$ . Wendet man nun denselben Satz auf die durch die Sehnen  $OP_1$  resp.  $OQ_1$  bestimmten Parabelsegmente an, indem man wieder die zu diesen Sehnen parallelen Tangenten mit ihren Berührungspunkten konstruiert, so entstehen wieder eingeschriebene Dreiecke mit den Grundlinien  $OP_1$  resp.  $OQ_1$ , und jedes von diesen ist doppelt so groß als das zugehörige durch die Tangenten seiner Eckpunkte gebildete umgeschriebene Dreieck.

Indem man dieses Verfahren immer wieder von neuem

$$PQ = MG = d - r \cos u,$$

oder:

$$\frac{r}{d - r \cos u} = \varepsilon,$$

woraus sich ergibt:

$$r = \frac{d\varepsilon}{1 + \varepsilon \cos u}.$$

Diese Gleichung besteht zwischen den Polarkoordinaten eines jeden Punktes des Kegelschnittes, aber auch nur eines solchen Punktes. Sie heißt die Polargleichung des durch die Größen  $d$  und  $\varepsilon$  definierten Kegelschnittes. Für  $u = 90^\circ$  erhält man die zu dem Brennpunkte  $F$  gehörige Ordinate, nämlich:

$$r = FR = d\varepsilon.$$

Setzt man daher  $d\varepsilon = p$ , wo also jetzt  $p$  den Halbparameter bedeutet, so läßt sich die Polargleichung des durch  $p = d\varepsilon$  und  $\varepsilon$  definierten Kegelschnittes in der Form schreiben:

$$(4) \quad r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos u}.$$

Dieselbe stellt eine Ellipse, eine Parabel, oder eine Hyperbel dar, je nachdem  $\varepsilon < 1$ ,  $\varepsilon = 1$ , oder  $\varepsilon > 1$  ist.

Man kann die drei Kegelschnitte noch in einer anderen Weise unter einem gemeinsamen Gesichtspunkte zusammenfassen. So verschieden nämlich auch die Gleichungen sind, die man unter Zugrundelegung Cartesischer Koordinaten für die Ellipse, die Parabel und die Hyperbel ableiten kann, sie haben doch alle das Gemeinsame, daß sie in Bezug auf  $x$  und  $y$  vom zweiten Grade sind und sich folglich alle als spezielle Fälle der allgemeinen Gleichung zweiten Grades:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

darstellen lassen. Aus diesem Grunde werden die Kegelschnitte auch als Kurven zweiten Grades bezeichnet. Eine vollständige Diskussion dieser allgemeinen Gleichung zweiten Grades liegt aber nicht mehr in dem Plane dieses Buches.

